

APPUNTI SULLE MOLLE

Carmine Napoli



Generalità

Introduzione

Le molle sono degli elementi meccanici in possesso di una elevata elasticità, esse, sotto l'azione di forze, anche non elevate, possono deformarsi in modo molto sensibile, pur restando entro i limiti della elasticità, immagazzinando una notevole quantità di energia.

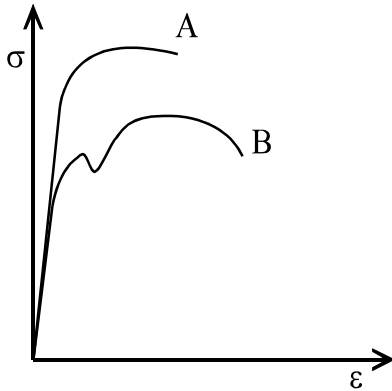


Fig. 1

Nel dimensionamento delle molle si deve cercare di ampliare la capacità di deformazione elastica dell'elemento, questo può essere ottenuto sia utilizzando materiale con un elevato limite elastico che dando all'elemento delle forme opportune.

In genere per le molle vengono utilizzati acciai al Silicio, o acciai al Cromo-Vanadio o acciai al Silicio-Cromo-Nichel, aventi un elevato limite elastico, che risulta spostato verso il limite di snervamento. Nel grafico di figura 1 sono riportati, indicativamente, i diagrammi $\sigma - \epsilon$ per un acciaio di costruzione (B) e di uno al silicio (A).

Curva di deformabilità

Un carico P applicato ad un corpo lo deforma, assunta come f l'entità della deformazione prodotta si può affermare che esiste una dipendenza tra essa e il carico P , questa dipendenza viene evidenziata da un grafico come quello in figura 2 che è chiamato *curva di deformabilità*. La direzione di P e di f deve essere la stessa, o almeno di P si deve considerare la componente sulla direzione di f .

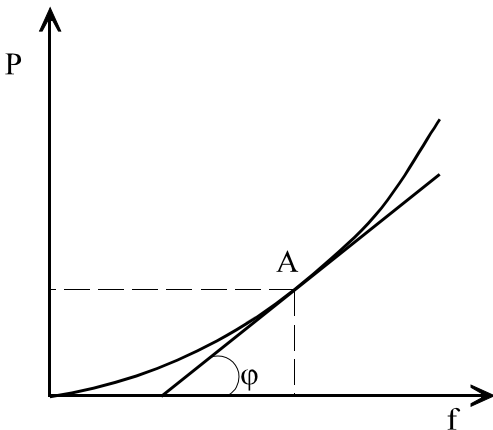


Fig. 2

Il carico P può essere anche una coppia che produrrà come deformazione una rotazione.

La costruzione del grafico deve avvenire in modo "statico" ossia molto lentamente in moto da eliminare ogni fenomeno di carattere dinamico, e le deformazioni non devono essere ostacolate da nessuna azione dissipativa

Rigidezza

Si definisce rigidezza di un sistema deformabile sottoposto ad un carico P il rapporto tra l'incremento infinitesimo dP della causa deformante e la relativa deformazione df .

$$k = \frac{dP}{df} \quad (1)$$

Nel grafico essa rappresenta la pendenza della curva di deformabilità rispetto all'asse delle f .

Deformabilità

Si definisce deformabilità l'inverso della rigidità

$$\alpha = \frac{df}{dP} \quad (2)$$

Deformazione elastica

Una deformazione si dice elastica quando essa scompare allo scomparire del carico che l'ha prodotta. Se un materiale presenta un comportamento elastico in corrispondenza di un determinato carico lo sarà anche per tutti i carichi inferiori.

L'elasticità del materiale di cui è fatto l'elemento ne influenza la rigidità, in genere capita che se le tensioni interne ricadono nel campo di validità della legge di Hooke la rigidità k dell'elemento risulta costante, da ciò scaturisce che la curva di deformabilità dell'elemento è lineare; quanto detto risulta vero se la configurazione geometrica del sistema varia di poco senza variare l'influenza del carico sulla deformazione.

Lavoro di deformazione

Il lavoro di deformazione è il lavoro compiuto dalla forza P per produrre la deformazione f .
L'espressione sarà:

$$L = \int_0^{f_m} P df \quad (3)$$

tenendo conto dell'espressione della rigidità si ha

$$L = \int_0^P \frac{P}{k} dP \quad (4)$$

e se la rigidità è costante con opportuni calcoli si ha

$$L = \int_0^P \frac{P}{k} dP = \frac{1}{k} \int_0^P P dP = \frac{P^2}{2k} = \frac{1}{2} Pf \quad (5)$$

Coefficiente di utilizzazione

Si definisce coefficiente di utilizzazione di una molla, il rapporto tra l'energia potenziale elastica accumulata sotto l'azione del carico **P** e l'energia che si avrebbe se il potenziale elastico assumesse in tutti i punti della molla il valore uguale a quello massimo indotto dalla stessa forza **P**.

Il potenziale elastico in un punto di un solido soggetto ad un sistema di carichi è l'energia elastica di deformazione, riferita all'unità di volume, corrispondente allo stato tensionale nel punto considerato, in termini di sforzi principali essa vale

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (6)$$

dove E è il modulo di elasticità lineare

ν è il modulo di Poisson

per trovare l'energia per tutto il volume del corpo deformato è necessario moltiplicare l'espressione di u per il volume elementare ed integrare, si avrà

$$U = \int_V u \, dV \quad (7)$$

Il valore del potenziale elastico u risulta variabile nel volume, supponendo che sia u_0 il suo valore massimo, possiamo chiamare con U_0 l'energia potenziale che si avrebbe se nel corpo tutti i punti avessero acquistato il potenziale massimo u_0 da cui

$$U_0 = u_0 \cdot V \quad (8)$$

si definisce coefficiente di utilizzazione il rapporto tra l'energia potenziale effettivamente accumulata U e quello massimo U_0

$$m = \frac{U}{U_0} \quad (9)$$

Il coefficiente di utilizzazione può assumere valori sempre inferiori ad 1 ed al massimo potranno essere 1, la molla sarà tanto più efficiente quanto più il valore di m si approssimerà ad 1.

Il parametro **m** è quindi un importante coefficiente per valutare l'efficienza della molla.

Nella ipotesi di nessuna azione dissipativa l'energia elastica accumulata dalla molla corrisponde a quella fatta per deformarla per cui sia ha

$$U = L = \frac{1}{2} P f_{\max} \quad (10)$$

Da cui si ottiene

$$m = \frac{P f_{\max}}{2 U_0} \quad (11)$$

Applicazioni delle molle

Tra le principali applicazioni delle molle si ricordano

- a) organi destinati ad esercitare una forza su un elemento meccanico imponendo un contatto che altrimenti potrebbe mancare, un esempio sono gli innesti a frizione
- b) organi capaci di attenuare gli effetti di urti, scosse, vibrazioni, come avviene per le sospensioni degli autoveicoli
- c) serbatoi di energia (negli orologi)
- d) misurare una forza (dinamometri)
- e) come elemento che accelera un moto come ad esempio nelle valvole, interruttori ecc.

Tipi di molle

La classificazione delle molle può essere fatta in vari modi, con riferimento al materiale, per cui avremo le molle metalliche o di gomma ecc, in base alle caratteristiche costruttive, ed avremo le molle ad elica, a balestra a tazze ecc., in base alla sollecitazione preminente per cui avremo le molle di flessione o di torsione, c'è comunque da rilevare come una molla non sarà mai soggetta ad una sola sollecitazioni di torsione o flessione, si considera la preminente.

La normativa sulle molle

Le norme UNI che riguardano le molle sono state pubblicate a partire dal 1978 e formano una raccolta di circa 120 pagine.

Si ricorda la tabella UNI 7900 intitolata “Molle ad elica cilindrica di compressione e trazione” composta di 7 parti:

- 1) Termini, simboli e definizioni
- 2) Calcolo delle molle di compressione
- 3) Dati per l'ordinazione e la costruzione delle molle di compressione
- 4) Classificazione e collaudo delle molle di compressione
- 5) Calcolo delle molle di trazione
- 6) Dati per l'ordinazione e la costruzione delle molle di trazione
- 7) Classificazione e collaudo delle molle di trazione

Le qualità degli acciai per molle sono state unificate nella UNI 3545

I fili tondi di acciaio per molle trafilati crudi sono divisi in 5 classi nella UNI 3823 con caratteristiche progressivamente migliori dalla classe A alla E

Le tabelle UNI 8736 e 8737 riportano la unificazione delle molle tazza.

Le tabelle UNI 3960, 3961 e 3962 riportano la larghezza delle foglie per le molle a balestra

Fili per molle di acciaio non legato trafilati

I fili per molle si classificano in quattro classi

classe A (bassa resistenza, sollecitazioni prevalentemente statiche limitate)

classe B (media resistenza, sollecitazioni prevalentemente statiche)

classe C (alta resistenza, sollecitazioni elevate e a fatica)

classe D (altissima resistenza, sollecitazioni elevate e a fatica)

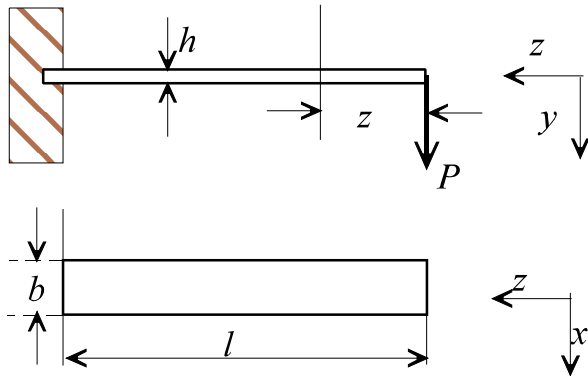
Diametri e resistenze

| Diametri mm | classe A N/mm ² | classe B N/mm ² | classe C N/mm ² | classe D N/mm ² |
|---------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0,1 | | | 2500 ÷ 2850 | |
| 0,12; 0,15; 0,2 | | | 2500 ÷ 2850 | |
| 0,25 | | 2160÷2460 | | |
| 0,25; 0,3; 0,35; 0,40; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6; 0,65 | 1860÷2160 | 2110÷3410 | 2350÷2650 | 2550÷2850 |
| 0,55 | | 2060÷2360 | | |
| 0,7; 0,75; 0,80; 0,85; 0,90; 1,00 | 1770÷2070 | 1960÷2260 | 2160÷2460 | 2350÷2650 |
| 1 | 1670÷1970 | 1910÷2210 | | |
| 1,1; 1,2; 1,3; 1,4 | 1670÷1970 | 1860÷2160 | 2110÷2360 | 2260÷2510 |
| 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 | 1570÷1870 | 1770÷2070 | 1960÷2160 | 2160÷2410 |
| 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; | 1470÷1770 | 1720÷1970 | 1960÷2160 | |
| 2,6; 2,7; 2,8; 2,9; 3 | 1370÷1670 | 1570÷1820 | 1770÷1970 | |
| 3,2; 3,4; 3,5; 3,7; 3,8; 4 | 1320÷1570 | | | |
| 4,2 | | 1520÷1770 | | |
| 4,5; 5 | | 1470÷1720 | 1670÷1870 | |
| 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5÷8 | 1180÷1380 | 1370÷1570 | 1520÷1720 | |
| | | | | |
| | | 1280÷1480 | 1470÷1670 | |
| 8,5; 9; 0,5; 10 | | 1180÷1330 | 1370÷1520 | |
| 10,5, 11 | | | 1280÷1430 | |
| 12; 13 | | 1130÷1280 | | |

Le molle di flessione

Molla a base rettangolare

Le molle di flessioni più semplici sono lamine incastrate ad un lato e sottoposte all'altra estremità ad una forza (o ad un momento), il caso più semplice è quello di figura 3 nella quale è raffigurata una lamina avente costanti lo spessore **h** e la larghezza **b**, è lunga **l** ed è sottoposta al carico **P**.



Il momento massimo si ha nella sezione di incastro e vale $M = Pl$

Il momento di inerzia **I** rispetto all'asse **x** che si considera passante per il baricentro della sezione vale

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (12)$$

mentre il modulo di resistenza a flessione è

$$W_f = \frac{bh^2}{6} \quad (13)$$

Il massimo sforzo normale si ha nella sezione di incastro e vale

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{W_f} \quad (15)$$

La freccia massima si ha invece all'altro estremo della molla e vale: $f_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$

sostituendo la **I** si ha:

$$f_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{3E \frac{bh^3}{12}} = \frac{4Pl^3}{Ebh^3}$$

il valore massimo della tensione è

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{6Pl}{bh^2}$$

il coefficiente di utilizzazione con opportune sostituzioni è:

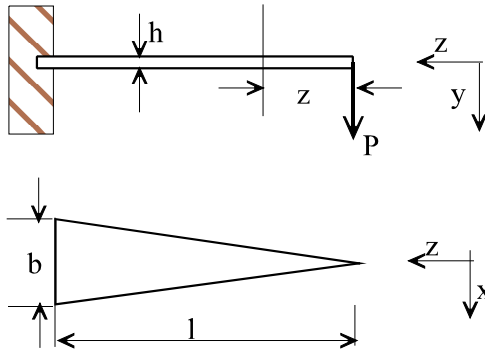
$$m = \frac{Pf_{\max}}{2u_0 V} = \frac{\frac{1}{2}P \frac{4Pl^3}{Ebh^3}}{bhl \frac{1}{2E} \left(\frac{6Pl}{bh^2} \right)^2} = \frac{1}{9}$$

dove $u_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\max}^2}{E}$ e $V = bhl$

Molla a base triangolare

Volendo aumentare il valore di m si deve cercare di diminuire la dipendenza della σ_{\max} dalla

posizione della sezione lungo l'asse z , questo si può ottenere variando le dimensioni della lamina. Si possono variare le dimensioni di h , b o di entrambe.



Il caso costruttivamente più semplice è quello che prevede la sola variazione di b .

Se la trave varia la dimensione di b lungo l'asse z mantenendo costante l'altezza h e facendo in modo che la σ_{\max} rimanga costante si ha

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{bh^2}$$

Fig. 4

chiamando b_z il valore di b in una particolare posizione di z si ha

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pz}{b_z h^2}$$

uguagliando le due quantità si ha

$$\frac{6Pl}{bh^2} = \frac{6Pz}{b_z h^2}$$

Da cui si ottiene

$$b_z = \frac{bz}{l}$$

si ha quindi una relazione lineare tra la base e la sua posizione sull'asse z , per cui la sezione più idonea risulta essere a base triangolare.

Ricavando il valore della freccia in questa situazione essa è:

$$f_{\max} = \frac{6Pl^3}{Ebh^3}$$

sostituendo questo valore nella espressione del coefficiente di utilizzazione e ricordando che $V = bhl/2$ si ha

$$m = \frac{\frac{1}{2}Pf_{\max}}{u_0 V} = \frac{Pf_{\max}}{2u_0 V} = \frac{\frac{1}{2}P \frac{6Pl^3}{Ebh^3}}{\frac{bhl}{2} \cdot \frac{1}{2E} \left(\frac{6Pl}{bh^2} \right)^2} = \frac{1}{3}$$

Pari al triplo del valore trovato in precedenza.

Considerando l'espressione della curva della lamina si ha

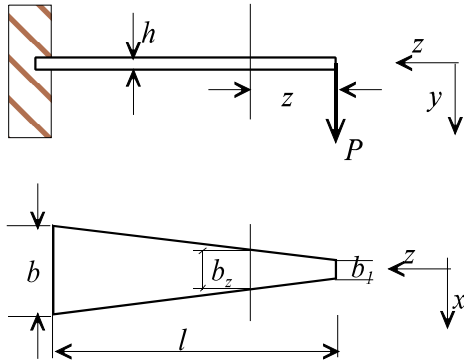
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{Pz}{E \frac{bh^3}{12}} = \frac{Pz}{E \frac{Pzh}{2 \sigma_{\max}}} = \frac{2 \sigma_{\max}}{Eh} = \text{cost}$$

la curvatura è quindi costante il che significa un andamento circolare.

Molle a base trapezia

La molla a base triangolare presenta due inconvenienti

- impossibilità di caricare alla sua punta la forza
- un grande ingombro in pianta



L'impossibilità di posizionare la forza alla punta della lamina, viene risolta tagliando la punta stessa per cui la sezione da triangolare a trapezia, come evidenziato in fig. 4, le relazioni trovate per una forma triangolare subiranno delle variazioni.

Con riferimento alla figura 4, posto $\beta = \frac{b_1}{b}$ utilizzando la similitudini fra triangoli si ha

$$\frac{b_z - b_1}{z} = \frac{b - b_1}{l}$$

Fig. 5

da cui si ricava il valore di b_z $b_z = b \left[\beta + (1 - \beta) \frac{z}{l} \right]$

il momento di inerzia della sezione in z rispetto all'asse baricentrica x è $I_z = \frac{b_z h^3}{12}$
sostituendo il valore di b_z trovato in precedenza si ha

$$I_z = \frac{\left[\beta + (1 - \beta) \frac{z}{l} \right] b h^3}{12} = I \left[\beta + (1 - \beta) \frac{z}{l} \right]$$

dove I rappresenta il momento di inerzia della sezione avente base b.

L'equazione della linea elastica è $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{Pz}{EI_z}$

l'integrazione dell'equazione ci permette di conoscere la freccia nei vari punti della molla, posto

$$K = \frac{3}{2} \frac{1}{1 - \beta} \left(3 - \frac{2}{1 - \beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta} \ln \beta \right) \right)$$

si ricava la freccia massima

$$f_{\max} = 4K \frac{Pl^3}{Ebh^3} = \frac{2}{3} K \frac{l^2 \sigma_{\max}}{Eh}$$

dalla quale il coefficiente di utilizzazione

$$m = \frac{2K}{9(1+\beta)}$$

Il valore di β è compreso tra 0, base triangolare e 1, base quadrata.
I relativi valori di β , K e m sono riportati nella tabella che segue.

| | | | | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| β | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| K | 1,500 | 1,390 | 1,316 | 1,250 | 1,202 | 1,160 | 1,121 | 1,085 | 1,054 | 1,025 | 1,00 |
| m | 0,333 | 0,28 | 0,24 | 0,21 | 0,19 | 0,17 | 0,16 | 0,14 | 0,13 | 0,12 | 0,11 |

Molle a balestra a più foglie

Il problema delle dimensioni eccessive della molla viene risolto dividendola in più strisce, aventi

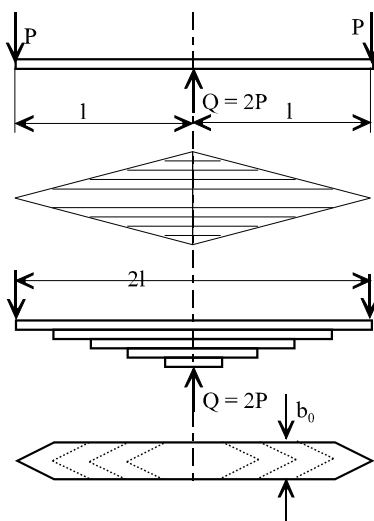


Fig. 6

tutte la stessa larghezza b_0 , ognuna delle quali può essere considerata come l'unione di due strisce ricavate dalla lamina di partenza e simmetriche rispetto alla mezzzeria.

Le varie strisce sono dette foglie, la più lunga, che è poi quella su cui viene direttamente applicato il carico, si chiamata "foglia maestra", esse sono mantenute l'una sull'altra con un bullone oppure con una staffa di serraggio posti al centro della molla, in aggiunta, per impedire movimenti di traslazione verticali, sono utilizzate delle fasce di collegamento.

La forma a punta triangolare (delle foglie), disegnate in fig.5, danno intaccature nelle foglie superiori, per ovviare a questo inconveniente, nella pratica applicazione le si costruiscono con estremità libere a forma di trapezio oppure a forma rettangolare.

In precedenza si è trovato la costanza della curvatura della molla (a base triangolare), divisa la molla in lamine e postele

l'una sull'altra saranno costrette ad acquisire la medesima curvatura per cui è logico pensare che il loro comportamento non sarà molto differente dal precedente; questa similitudine di comportamento è stato ampiamente verificato anche nella pratica, per questo si deduce che è possibile utilizzare lo stesso metodo di calcolo.

Dividendo la lamina in n parti ogni lamina ha la base $b_0 = b/n$

Il momento d'inerzia della molla intera sarà

$$I = \frac{bh^3}{12} = n \frac{b_0 h^3}{12}$$

dall'espressione della freccia massima $f_{\max} = \frac{Pl^3}{2EI}$ per una molla a base triangolare si ricava

$$f_{\max} = \frac{Pl^3}{2EI} \frac{12}{nb_0h^3} = 6 \frac{Pl^3}{nEbh^3}$$

che, per analogia, sarà la freccia massima di una molla a balestra

Curva caratteristica di una molla in presenza di attrito

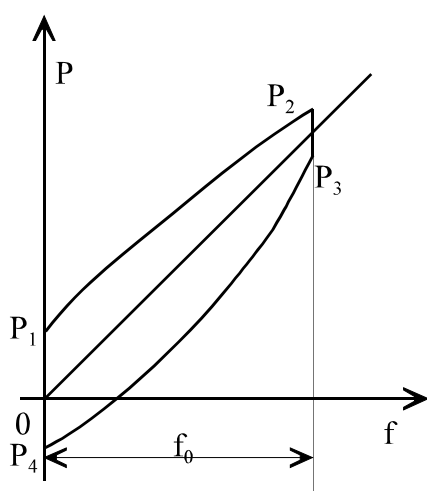


Fig. 7

In presenza di attrito la curva caratteristica della molla non sarà quella intrinseca di cui si è finora parlato, si ricordi come una delle ipotesi era l'assenza di fenomeni di attrito.

In figura 7 sono indicativamente presentate le curve di deformazione, in presenza di attrito, di una molla quando viene prima caricata e successivamente scaricata.

Partendo dal punto 0 la deformazione della molla inizia solo quando il carico ha raggiunto un valore P_1 , superiore alla forza di attrito presente tra le varie lamine. La curva P_1 - P_2 è la curva di deformazione della molla quando il carico aumenta.

Al momento in cui si inizia ad eliminare il carico la presenza delle forze di attrito non permetterà l'immediata variazione della freccia che rimane costante fino a che il carico non assume il valore P_3 . La curva P_3 - P_4 è la curva di deformazione della molla in concomitanza dello scarico della stessa.

Considerando un ciclo completo formato da un carico della molla e da un successivo scarico, le varie curve individueranno un ciclo completo, che delimiterà un'area che rappresenta l'energia dissipata nel ciclo a causa dell'attrito.

Particolarità costruttive

Gli attacchi delle cariche alle estremità possono farsi in più modi, il più comune è l'attacco con occhio, in questo occhio viene forzato a caldo un perno sulle cui estremità oscillano due bielle parallele, collegate analogamente all'estremità opposta ad un perno collegato al telaio.

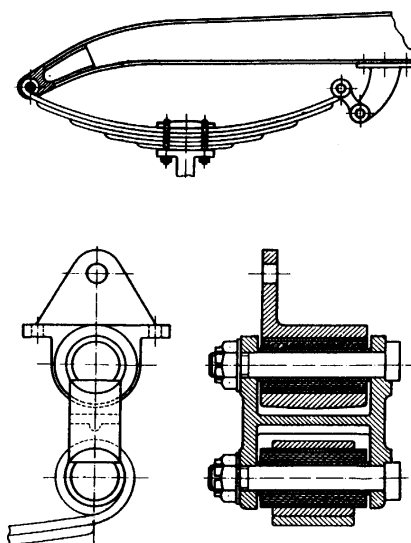


Fig. 8 Attacchi delle molle balestra da "R. Giovannozzi - Costruzione di macchine"

Calcolo delle molle a balestra

Consideriamo il dimensionamento di una molla a balestra applicata ad un carro ferroviario o ad un mezzo tramviario.

Considerando il carro vuoto, il suo peso sarà sopportato dalle varie molle, ognuna per la parte che le compete, sia Q il carico che agisce su una generica mezza balestra. Quando il carro viene riempito alla Q iniziale si aggiunge un ulteriore peso Q' , a causa di quest'ultima la deformazione della balestre aumenta di un valore Δf .

La forza totale $Q+Q'$ impongono sulla balestra delle tensioni di flessioni il cui massimo sia σ_{\max} , nel calcolo si porrà un limite al valore che può assumere questa tensione imponendo che esse non superino il valore 590 -730 N/mm².

La rigidezza è
$$k = \frac{Q'}{\Delta f}$$

Ricordando l'espressione della freccia massima per le molle a balestra si ha

$$\frac{Q'}{\Delta f} = \frac{Ebh^3}{4KI^3}$$

mentre dall'espressione della tensione massima si ha

$$\sigma_{\max} = \frac{6(Q+Q')l}{bh^2}$$

Eliminando la bh^2 dalle due espressioni si trova

$$l = \sqrt{\frac{3E}{2K} \frac{Q+Q'}{\sigma_{\max}} \frac{\Delta f}{Q'} h}$$

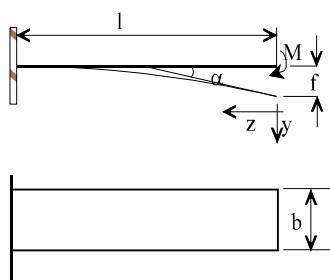
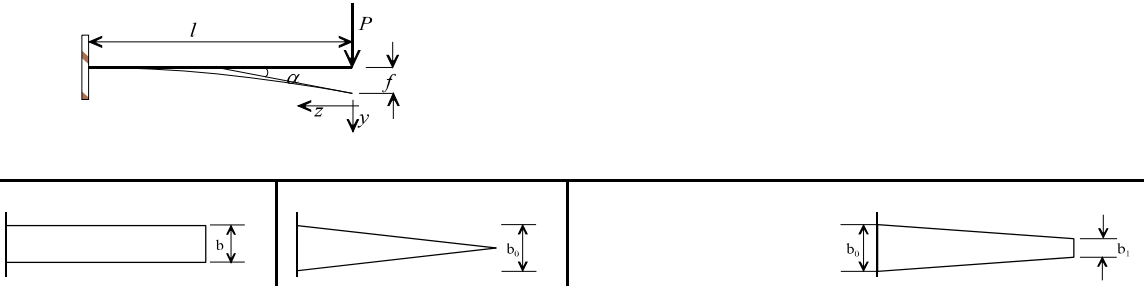
che fornisce il valore di l in base alla conoscenza dell'altezza h scelta (che risulta unificata).

Molleggio

Si riporta una tabella tratta da "V. Zignoli vademecum Ingegnere - edizioni Utet"

Le flessibilità normalmente ammesse sono :

| | | Assali | |
|------------------------|--------|-------------|--------------|
| | | Anteriori | Posteriori |
| Automobili da turismo | | | |
| con assi rigidi | mm/daN | 0,12 ÷ 0,18 | 0,35 ÷ 0,50 |
| con ruote indipendenti | | 0,30 ÷ 0,40 | 0,30 ÷ 0,40 |
| Autocarri | | 0,05 ÷ 0,15 | 0,07 ÷ 0,20 |
| Vetture Ferroviarie | | | |
| Vagoni merci | mm/daN | | 0,02 ÷ 0,03 |
| Vetture Viaggiatori | | | 0,10 ÷ 0,08 |
| Vetture letto | | | 0,15 ÷ 0,20 |
| Automotrici veloci | | | 0,10 ÷ 0,022 |

| | | | | |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| |  |  | | |
| Abbassamento della sezione y(z) | $\frac{6M}{Eb h^3}(z^2 - 2lz + l^2)$ | $\frac{2P}{Eb h^3}(z^3 - 3l^2z + 2l^3)$ | $\frac{6Pl}{Eb_0 h^3}(z^2 - 2lz + l^2)$ | A |
| Rotazione della sezione dy/dz | $\frac{-12M}{Eb h^3}(l - z)$ | $\frac{-6P}{Eb h^3}(l^2 - z^2)$ | $\frac{-12Pl^3}{Eb_0 h^3}(l - z)$ | B |
| Freccia f | $\frac{6Ml^2}{Eb h^3}$ | $\frac{4Pl^3}{Eb h^3}$ | $\frac{6Pl^3}{Eb_0 h^3}$ | $4K \frac{Pl^3}{Eb_0 h^3}$ |
| Rotazione della sezione libera α | $-\frac{12Ml^2}{Eb h^3}$ | $-\frac{6Pl^3}{Eb h^3}$ | $-\frac{12Pl^2}{Eb_0 h^3}$ | $-\frac{12Pl^2}{Eb_0 h^3} \frac{1}{1-\beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{1-\beta} \ln \beta\right)$ |
| Rigidezza k | $\frac{Eb h^3}{12l}$ | $\frac{Eb h^3}{4l^3}$ | $\frac{Eb_0 h^3}{6l^3}$ | $\frac{Eb_0 h^3}{4Kl^3}$ |
| Tensione massima σ_{\max} | $\frac{6M}{bh^2}$ | $\frac{6Pl}{bh^2}$ | $\frac{6Pl}{b_0 h^2}$ | $\frac{6Pl}{b_0 h^2}$ |
| Coefficiente di utilizzazione m | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9} \frac{K}{1+B}$ |

$$A = \frac{12Pl^3}{Eb h^3} \frac{1}{(1-\beta)^2} \left[\frac{1-3\beta}{2} - (1-2\beta) \frac{z}{l} + \frac{1-\beta}{2} \frac{z^2}{l^2} - \frac{\beta}{1-\beta} \left[\beta + (1-\beta) \frac{z}{l} \right] \ln \left[\beta + (1-\beta) \frac{z}{l} \right] \right]$$

$$B = -\frac{12Pl^2}{Eb h^3} \frac{1}{1-\beta} \left[1 - \frac{z}{l} + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \left[\beta + (1-\beta) \frac{z}{l} \right] \right]$$

$$K = \frac{3}{2} \frac{1}{1-\beta} \left(3 - \frac{2}{1-\beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{1-\beta} \ln \beta \right) \right)$$

Le molle di torsione

La molla ad asse rettilineo

La molla di torsione, nella sua configurazione più semplice, consiste in una barra rettilinea a sezione costante (in genere circolare, ma può essere anche rettangolare) sulla quale viene applicato un momento torcente.

In figura 14 è rappresentata una barra di torsione avente un estremo vincolato e l'altro caricato da un momento torcente generato da una forza applicata alla estremità di una manovella

Per evitare la presenza di sollecitazioni di tipo flessionale è stato applicato un supporto vicino all'estremità libera.

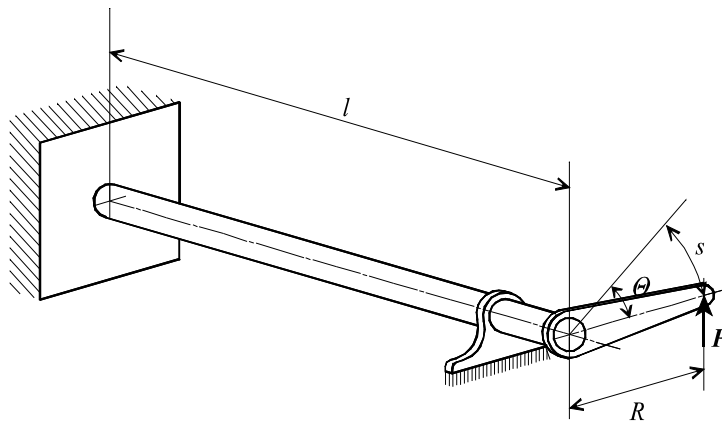


Fig. 14

Il momento generato dalla forza **P**, applicata all'estremità della manovella lunga **R**, e nell'ipotesi che la forza sia perpendicolare alla manovella stessa, vale

$$M = PR$$

questo produce la torsione della barra per cui la manovella ruoterà di un angolo θ e la sua estremità percorrerà un arco s ricavabile dalla relazione

$$s = R\theta = R l \theta_l$$

dove l è la lunghezza della barra mentre θ_l è l'angolo relativo alla unità di lunghezza.

La rotazione della manovella può incidere sul modulo del momento torcente, infatti se la forza, durante la deformazione, conserva la sua direzione essa non sarà più perpendicolare alla manovella e quindi la relazione per il momento diventa

$$M_t = P R \cos \theta$$

che è variabile con la deformazione; diverso è il caso se la forza P durante la deformazione si mantiene normale alla manovella, in questo caso il momento rimane costante.

Un esempio di barra di torsione è la barra antirollio delle automobili: si tratta di una barra vincolata al telaio della vettura e con le due estremità collegate a due ruote poste sullo stesso asse e parallele. Ogni qual volta per un qualsiasi motivo (asperità terreno, curva ecc) le sospensioni delle ruote assumono dei valori diversi per le frecce, si genera un momento torcente che tende a contrastare la causa deformante, con effetti stabilizzanti sul moto.

Detto d il diametro della barra, l la sua lunghezza e con gli altri dati ricavabili dalla figura, l'angolo di torsione θ sarà

$$\theta = \frac{32}{\pi} \frac{PR}{Gd^4} l$$

la freccia f coincide con lo spostamento del carico P e vale

$$f = \frac{32}{\pi} \frac{PR^2}{Gd^4} l$$

la rigidezza sarà

$$k = \frac{dP}{df} = \frac{P}{\frac{32}{\pi} \frac{PR^2}{Gd^4} l} = \frac{\pi}{32} \frac{Gd^4}{R^2 l}$$

Le tensioni prodotte dal momento torcente sono facilmente calcolabili, esse saranno massime sulla estremità della barra e sono date dalla relazione

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi} \frac{PR}{d^3}$$

Dalla relazione della rigidezza si ricava come essa sia costante, per cui possiamo affermare che il lavoro di deformazione totale della molla è

$$L = \frac{1}{2} M_t \theta$$

tenendo conto che il volume della barra è

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l$$

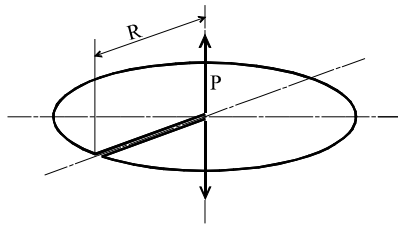
ricordando l'espressione del potenziale elastico nel caso della sollecitazione di torsione si ha

$$m = \frac{\frac{1}{2} M_t \theta}{\frac{1}{2} V \frac{\tau^2}{G}} = \frac{\frac{1}{2} PR \frac{32PR}{G\pi d^4} l}{\frac{1}{2} \frac{\pi d^2 l}{4} \left(16 \frac{PR}{\pi d^3} \right)^2 \frac{1}{G}} = \frac{1}{2}$$

da cui si ricava che la barra di torsione utilizza il lavoro meglio di quanto non faccia la molla di flessione.

In figura 15 è disegnata una spira, si noti come essa possa essere considerata come una barra di torsione, infatti le due forze, applicate al suo centro mediante due bracci indeformabili e dirette in verso opposto, producono sulle due facce un momento torcente che vale

$$M_t = PR$$



dove **P** è il modulo delle forze applicate ed **R** il raggio della spira.

Fig. 15

Le due forze, mediante i bracci rigidi, producono uno scorrimento, parallelo all'asse della spira, delle due facce di estremità, con la nascita di una freccia **f**, questa è uguale a quella prodotta in una barra di torsione avente la stessa lunghezza $l = 2\pi R$ della spira, ma ad andamento rettilineo (caricata con la stessa forza posta alla stessa distanza R dall'asse della barra), ricordando quanto trovato in precedenza per la barra di torsione si ha

$$f = 2\pi R^2 \theta$$

Lo stato tensionale indotto inizialmente nella spira è quello derivato dal momento torcente costante e dal taglio anch'esso costante, dopo la deformazione nasceranno delle tensioni di flessione e di trazione-compressione (in dipendenza del verso del carico P) con le relative deformazioni, ma queste risultano però essere di entità trascurabili rispetto a quelle prodotte dalla torsione.

Rispetto alla barra ad asse rettilineo questa molla presenta, a parità di freccia, un ingombro minore, e la freccia è un segmento rettilineo e non un arco di cerchio.

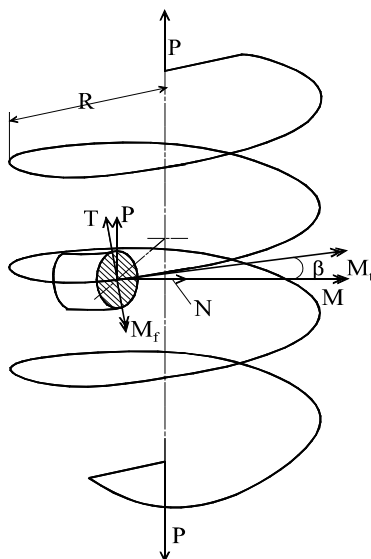


Fig. 16

Per ampliare le caratteristiche della spira ad essa ne vengono aggiunte delle altre, se queste sono complanari rispetto a quella iniziale, allora si ha una molla a spirale, questa però viene quasi sempre utilizzata come molla di flessione, se invece le spire sono aggiunte l'una sull'altra allora si hanno quelle che vengono dette molle ad elica. Queste possono essere considerate come un filo che si avvolge attorno ad un solido che può essere sia un cilindro che un cono, le molle cilindriche sono molto più utilizzate che le molle coniche.

Nella figura 16 è disegnata una molla ad elica avente andamento circolare, le **P** sono forze applicate sull'asse della molla ma con verso opposto, β è l'angolo di avvolgimento della molla attorno al cilindro di raggio **R** e **d** è il diametro del filo che forma la molla.

Nella figura è rappresentata una generica sezione sulla quale è applicata la forza **P** traslata dall'asse della molla al centro della sezione, nello stesso punto è applicata la coppia di trasporto che vale

$$M = PR$$

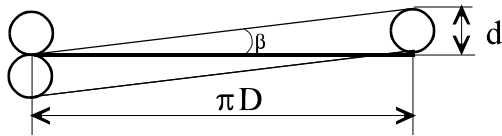
Scomponendo sia la forza **P** che il momento **M** secondo due

assi di cui uno perpendicolare alla sezione e l'altro tangente ad essa si ottengono

$$N = P \sin \beta \quad T = P \cos \beta \quad M_t = PR \cos \beta \quad M_f = PR \sin \beta$$

da cui scaturisce che il filo è sottoposto, in quella sezione, contemporaneamente, a sollecitazione di trazione, taglio, torsione, flessione, tutte dipendenti dall'angolo di avvolgimento β .

Quando la molla ad elica è sottoposta a compressione le spire tendono ad avvicinarsi, il suo minimo



ingombro corrisponde al momento in cui tutte le spire sono a contatto, in tale situazione una spira si avvolge attorno al cilindro di una quantità pari al diametro del filo per cui si avrà

$$\tan \beta = \frac{d}{\pi D}$$

Fig. 17

In genere si assumono valori per i due diametri tali

che il rapporto D/d sia compreso tra 4 e 25, se supponiamo di considerare $\frac{d}{D} = \frac{1}{8}$ è possibile

calcolare l'angolo β al momento del contatto che sarà $2^\circ 20'$, inoltre se la molla viene tesa la β aumenterà ma essa non assumerà valori maggiori di 2β che nel nostro caso sarà $4^\circ 40'$, con questi angoli i valori di $\sin \beta$ e di $\tan \beta$ sono molto piccoli mentre il $\cos \beta$ è quasi 1, per questo risulta lecito trascurare le sollecitazioni di trazione e di flessione, e non si commette un grande errore ipotizzando la molla soggetta al solo momento torcente pari a

$$M_t = PR$$

questo sia per il calcolo delle deformazioni che delle tensioni interne.

Definendo con n il numero di spire efficaci, ovvero quelle che non sono a contatto con gli appoggi e quindi effettivamente partecipano alla deformazione, la lunghezza di una molla ad elica vale

$$l = n \frac{\pi D}{\cos \beta}$$

in analogia con le molle a torsione, la freccia massima varrà

$$f = n \frac{\pi D^2}{2 \cos \beta} \theta_1$$

dove θ_1 è l'angolo unitario definito in precedenza.

Posto $\cos \beta = 1$ si ha $l = n \pi D = n \pi 2R$ da cui $\frac{l}{\pi} = n 2R$

ricordando la freccia f si ha

$$f = P \frac{32}{\pi} \frac{R^2 l}{G d^4} = P \frac{l}{\pi} \frac{32 R^2}{G d^4} = P n 2R \frac{32 R^2}{G d^4} \quad f = P n \frac{64 R^3}{G d^4}$$

L'elica in genere è a passo costante, ma si hanno anche casi in cui il passo è variabile, per questo al momento della compressione la spira distante di meno si toccheranno prima e questo inciderà sulla rigidezza che non risulta essere più costante, ma variabile.

Gli studi fatti da O. Göhner sulle deformazioni e sulle sollecitazioni in un solido a sezione circolare o rettangolare e ad andamento curvilineo, portano alla conclusione che gli aumenti delle tensioni

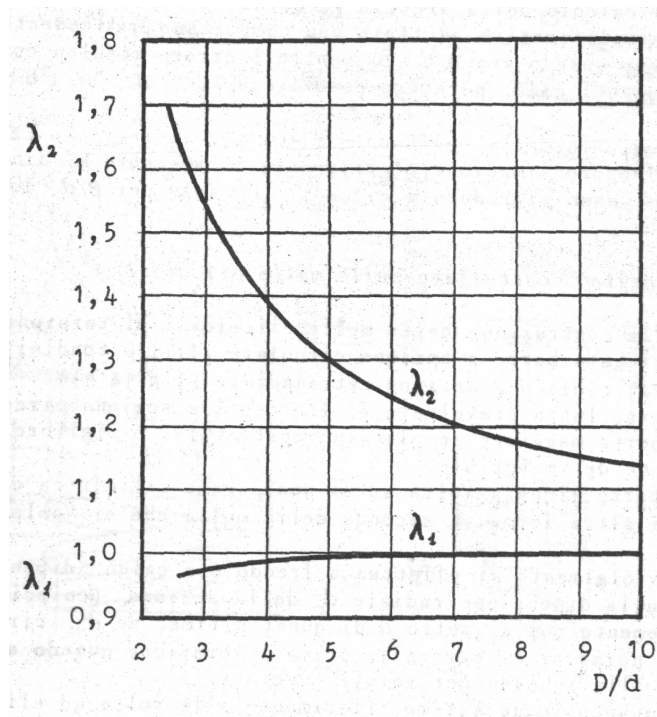


Fig. 18

tangenziali massime dovute all'effetto della curvatura non sono in genere trascurabili, mentre è invece molto piccola l'influenza sulle deformazioni, il valore della deformazione del taglio $c = \frac{d}{D}$ e della rigidezza si ricavano in funzione di due coefficienti $\lambda_1^{(1)}$ e λ_2 dipendenti dal rapporto $\frac{d}{D}$ gli andamenti di λ_1 e λ_2 sono ricavati dal grafico allegato in figura 18
Si ottiene

$$f = 8\lambda_1 n \frac{PD^3}{Gd^4}$$

$$k = \frac{Gd^4}{8\lambda_1 n D^2}$$

$$\tau_0 = \frac{8L_2}{\pi} \frac{PD}{d^4} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{Gd}{\pi n D^2} f$$

¹

$$\lambda_1 = 1 + \frac{5}{4}c + \frac{7}{8}c^2 + c^3$$

La sezione della molla ad elica di torsione è di solito circolare o rettangolare, la precedente risulta però maggiormente utilizzata in quanto è di più facile lavorazione, infatti per far sì che l'elica abbia una sezione rettangolare si deve partire da una barra avente sezione trapezia, che nel momento in cui il filo viene avvolto attorno al cilindro acquista una forma rettangola.

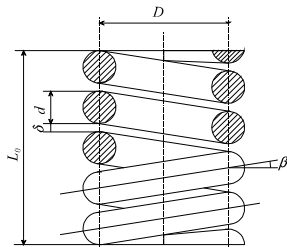


Fig. 19

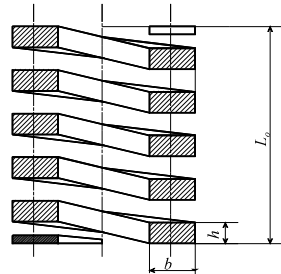


Fig. 20

L'avvolgimento viene fatto a freddo per tondini di acciaio con diametro inferiore a 13 mm e a caldo per quelli aventi diametro maggiore.

Considerando una molla a sezione cilindrica e con inclinazione costante, il rapporto tra i diametri D della spira e d della sezione va da un rapporto 4 ad un valore 25, comunque non sono mai inferiori a 3, gli angoli di avvolgimento non superano di norma gli 8° , in ogni caso in esercizio questo valore non viene mai superato.

Le molle ad elica possono essere fatte per essere utilizzate in compressione ed in trazione, a seconda dell'uso si avranno diverse conformazioni delle spire di estremità.

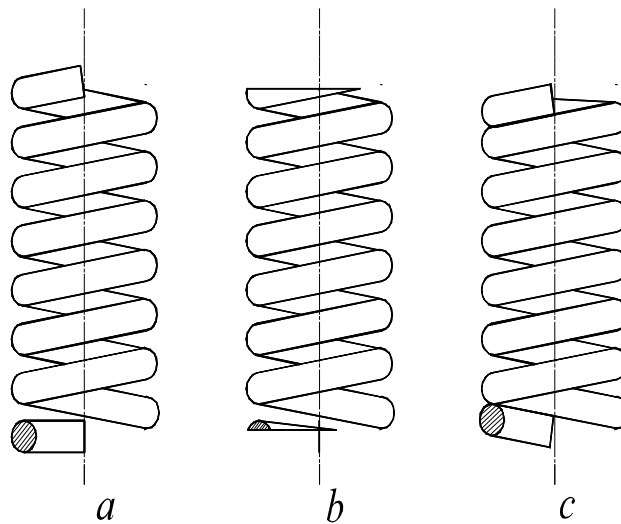


Fig. 21

Nelle molle di compressione si ricorre ordinariamente al sistema di accostare le spire di estremità a quelle contigue, riducendone l'inclinazione fino al valore minimo corrispondente alla condizione di contatto tra le spire. Poiché di norma la molla viene montata tra due superfici piane parallele le spire di estremità vengono spianate normalmente all'asse in modo da estendere le superfici di contatto.

Le spire di estremità ad inclinazione ridotta non concorrono alla deformazione globale della molla, di ciò si deve tener conto nel calcolo della freccia e della rigidezza della molla, considerando un

numero di spire attive inferiore a quelle totali, queste saranno somma di un numero n di spire attive che partecipano alla deformazione e di n_i spire inerti

$$n_t = n + n_i$$

Il valore delle n_i dipende anche dal modo con cui la molla viene caricata, nella tabella che segue sono indicati diverse modalità di carico e i diversi valori di n_i

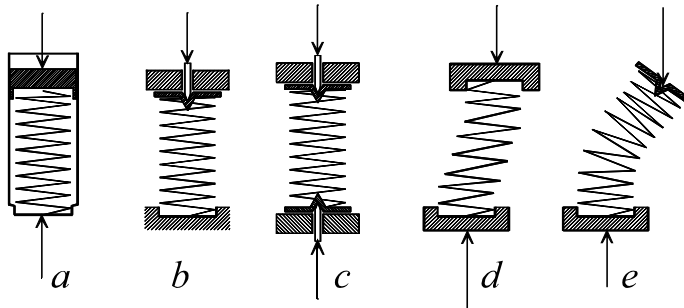
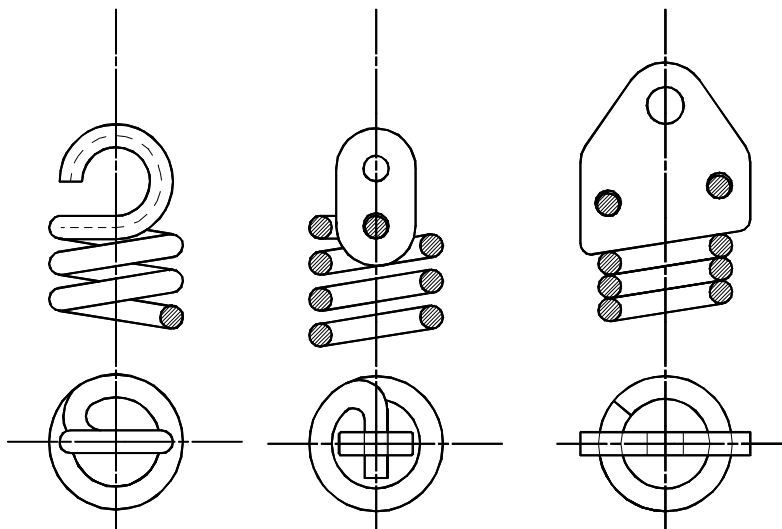


Fig. 22

In figura 22 sono visualizza delle diverse condizioni di vincolo delle estremità

- a) Estremità incastrate e guidate $n_i = 2$
- b) Estremità incastrate incernierate e guidate $n_i = 1,5$
- c) Estremità incernierate e guidate $n_i = 1$
- d) Estremità incastrate ma non guidate $n_i = 1$
- e) Estremità Incastrate libere $n_i = 0,5$

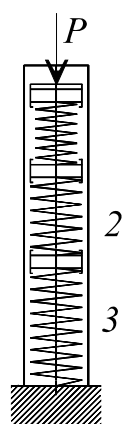


Spesso le molle non vengono utilizzate da sole ma in un sistema che prevede un impiego di due o più di esse, le configurazioni possibili possono essere più o meno complesse, tutte sono comunque riconducibili a due configurazioni fondamentali in serie e in parallelo

Due molle si diranno poste in serie se il carico agisce con la stessa intensità su ognuna di esse, producendo una deformazione del sistema che è la somma delle deformazioni delle singole molle, si diranno in parallelo se il carico si ripartisce sulle varie molle in modo che ognuna di questa ne sopporta solo una parte, in questo caso le deformazioni delle singole molle sono tutte uguali e sono uguali alla deformazione totale del sistema.

Molle in serie

In figura 23 è rappresentato un sistema di 3 molle poste in serie. Ipotizzando che le rigidezze (che si suppongono costanti) siano k_1, k_2, k_3 si vuole trovare la rigidezza di una molla equivalente alle tre. La freccia totale è la somma delle singole frecce per cui si ha



$$\sum_{i=1}^n f_i$$

ricordando l'espressione della rigidezza, della singola molla

$$k_1 = \frac{P}{f_1} \quad \text{da cui} \quad f_1 = \frac{P}{k_1}$$

Calcolando le frecce di tutte le mole e sostituendo nella formula precedente si ha

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} + \frac{P}{k_3} = P \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)$$

Fig. 24

per la molla equivalente deve valere $f = \frac{P}{k_e}$ da cui è possibile ricavare la rigidezza equivalente che vale

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

considerando un sistema di n molle si ha

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

Il grafico a lato presenta una modalità grafica per trovare la rigidezza della molla equivalente

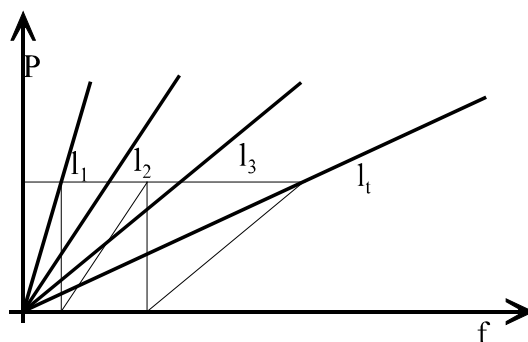


Fig. 25

Molle in parallelo

In figura è rappresentato un sistema di 3 molle poste in parallelo. Ipotizzando che le rigidezze (che si suppongono costanti) siano k_1 , k_2 , k_3 si vuole trovare la rigidezza di una molla equivalente alle tre. La freccia totale è la stessa per ogni singola molla mentre ogni molla sopporta una parte del carico P per cui si ha

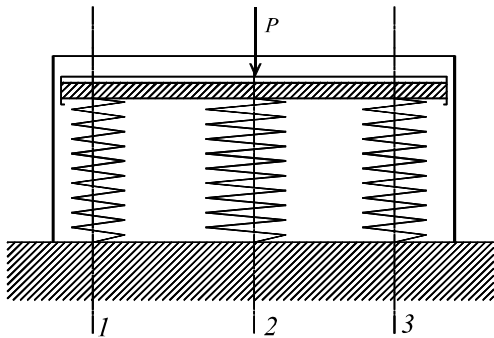


Fig. 27

doli si ha il carico totale

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = f k_1 + f k_2 + f k_3 = f (k_1 + k_2 + k_3)$$

per la molla equivalente deve valere $P l = f k_e$ da cui è possibile ricavare la rigidezza equivalente che vale

$$k_e = f (k_1 + k_2 + k_3)$$

considerando un sistema di n molle si ha

$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i$$

Il grafico a lato presenta una modalità grafica per trovare la rigidezza della molla equivalente

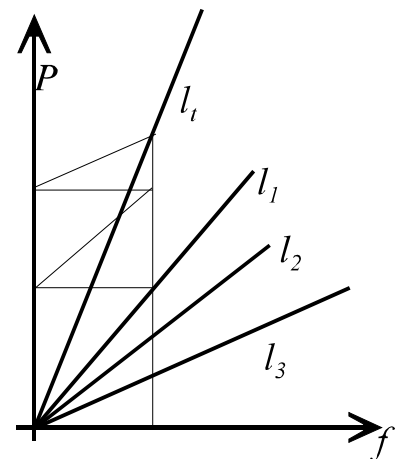
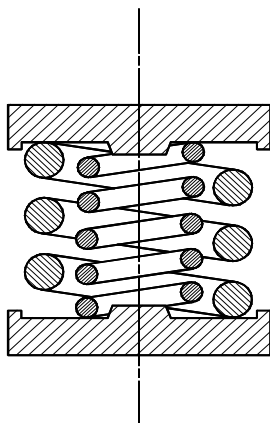
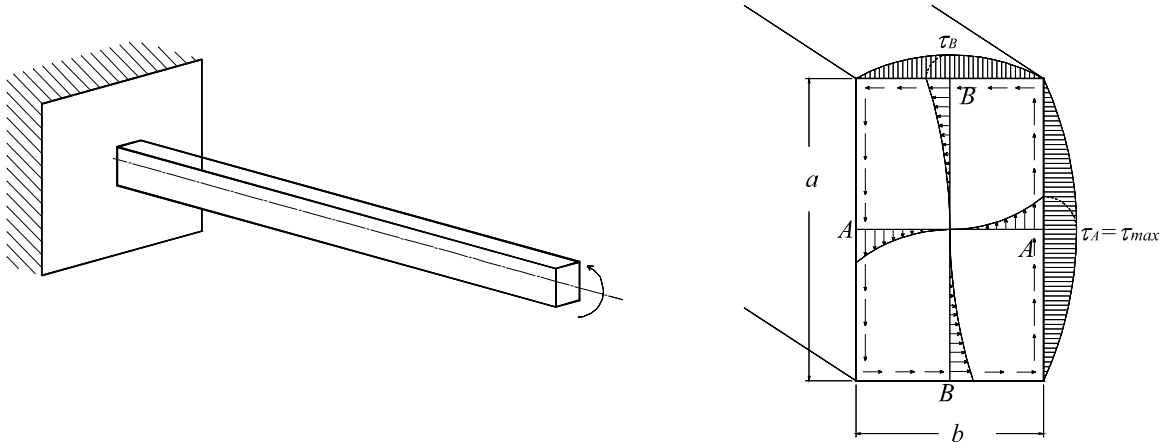


Fig. 26

La molla ad asse rettilineo a sezione rettangolare

La sezione non rimane piana ma si ingobba, il centro di torsione coincide con il centro di massa, i valori massimi della tensione τ si hanno sul bordo della sezione e si hanno a metà del lato



Per determinare la sollecitazione massima e l'angolo di torsione è possibile utilizzare le formule che seguono

$$\tau_A = \tau_{max} = \alpha \frac{M_t}{ab^2}$$

$$\theta = \beta \frac{M_t}{Gab^3} l$$

dove α e β sono riportati nella tabella che segue, dove $K = \frac{a}{b}$ (lato maggiore/lato minore)

| K | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 20 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| α | 4,80 | 4,57 | 4,40 | 4,27 | 4,16 | 4,07 | 3,88 | 3,74 | 3,55 | 3,43 | 3,35 | 3,20 | 3,10 |
| β | 7,11 | 6,02 | 5,35 | 4,91 | 4,60 | 4,37 | 4,01 | 3,80 | 3,56 | 3,43 | 3,35 | 3,20 | 3,10 |

per i valori di τ_{max} approssimati (del 4%) è possibile utilizzare la seguente espressione

$$\alpha = 3 + 1,8 * \frac{b}{a}$$

Per il calcolo della τ_B si possono utilizzare le seguenti relazioni

$$\tau_B = \eta \frac{M_t}{ab^2}$$

Con

$$\eta = 2,2 + 2,6 * \frac{b}{a}$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| K | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 20 |
| α | 4,80 | 4,57 | 4,40 | 4,27 | 4,16 | 4,07 | 3,88 | 3,74 | 3,55 | 3,43 | 3,35 | 3,20 | 3,10 |
| β | 7,11 | 6,02 | 5,35 | 4,91 | 4,60 | 4,37 | 4,01 | 3,80 | 3,56 | 3,43 | 3,35 | 3,20 | 3,10 |
| η | 1,00 | | | | 0,820 | 0,795 | 0,766 | 0,753 | 0,745 | 0,744 | 0,743 | 0,742 | 0,742 |

Bibliografia

- [1] AA.VV. Appunti di esercitazioni di costruzione di macchine
 Ed. CUEN
- [2] Straneo e Consorti Disegno, progettazione e organizzazione Industriale vol. 2
 Ed. Principato
- [3] Baldassini Vademecum per disegnatori e tecnici
 Ed. Hoepli
- [4] Punzi Corso superiore di meccanica e macchine
 Ed. Hoepli
- [5] R. Giovannozzi Costruzione di macchine
 Ed. Patron
- [6] G. Nerli Lezioni di costruzione di macchine vol 2
 Ed. Levrotto e bella