

**ESERCIZI UNITA' A – SOMMARIO**

**A. UNITA' DI MISURA**

**A.I. Dimensioni fisiche**

**A.II. Misure e unità di misura**

**A.III. Sistema Internazionale (SI) ed unità di misura fondamentali**

**A.IV. Unità di misura derivate**

**A.V. Convenzioni formali**

### A.I. Dimensioni fisiche

Le quantità fisiche sono specificate in termini di *dimensioni* o *grandezze fisiche*. Cinque grandezze fondamentali sono impiegate in termodinamica, termocinetica e fluidodinamica:

- lunghezza [L]
- massa [M]
- tempo [T]
- temperatura [ $\theta$ ]
- quantità di sostanza [m]

Tutte le altre grandezze fisiche possono essere riferite alle grandezze fondamentali. Ad esempio:

- forza [M·L·T<sup>-2</sup>]
- energia o lavoro [M·L<sup>2</sup>·T<sup>-2</sup>]
- potenza [M·L<sup>2</sup>·T<sup>-3</sup>]
- pressione [M·L<sup>-1</sup>·T<sup>-2</sup>]
- massa volumica [M·L<sup>-3</sup>]
- massa molare [M·m<sup>-1</sup>]
- capacità termica massica [L<sup>2</sup>·T<sup>-2</sup>· $\theta$ <sup>-1</sup>]

### A.II. Misure e unità di misura

Si definisce *misura* il procedimento con cui si fa corrispondere un numero ad una certa grandezza fisica.

A tal scopo, occorre innanzitutto scegliere una grandezza della stessa specie, da utilizzare come campione, ed assegnare ad essa il valore numerico “uno”. Si definisce così l'*unità di misura*. Si va quindi a verificare il numero di volte che l'unità di misura è contenuta nella grandezza da misurare.

Alla fine, ogni grandezza fisica può essere caratterizzata con un *numero*, che ne rappresenta la misura, seguito obbligatoriamente da un *simbolo*, che indica l'unità di misura.

### A.III. Sistema Internazionale (SI) ed unità di misura fondamentali

Fino a non molti anni fa, la situazione sulle unità di misura era decisamente caotica. Solo per fare un esempio, per la lunghezza si utilizzavano: pollice (quello di Enrico VIII, notoriamente corpulento!), spanna, piede, braccio, passo, pertica, miglio, lega, ecc. Queste unità di misura assumevano poi valori anche molto diversi, a seconda della località geografica e dell'ambito applicativo. Soltanto con riferimento al miglio, si distingueva (e si distingue ancora) tra:

- miglio geografico 1855.4 m
- miglio marino inglese 1853.184 m
- miglio marino internazionale e U.S.A. 1852 m

- miglio marino italiano 1851.6 m
- miglio terrestre inglese 1609.344 m
- miglio terrestre U.S.A. 1609.343 m

Per razionalizzare la situazione, nel 1961 si è definito, nel corso dell'11<sup>a</sup> Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure, il Sistema Internazionale d'Unità, usualmente abbreviato SI. Questo considera sette grandezze fisiche fondamentali: *lunghezza, massa, tempo, temperatura termodinamica, quantità di sostanza, intensità di corrente elettrica e intensità luminosa*. Le unità di misura prescritte per tali grandezze, dette *unità di misura fondamentali*, sono, rispettivamente: *metro, kilogrammo, secondo, kelvin, mole, ampere e candela*. Si danno maggiori informazioni al riguardo nella tabella riportata nel seguito.

Grandezze fisiche ed unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale			
Quantità	Unità	Simbolo	Definizione
Lunghezza [L]	metro	m	Inizialmente si faceva riferimento ad un campione, poi il metro è stato calcolato come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto nel tempo di 1/299'792'458 secondi e, infine, è stato definito come 1/1'650'763.73 volte la lunghezza d'onda, nel vuoto, della radiazione corrispondente alla transizione tra i livelli 2p <sub>10</sub> e 5d <sub>5</sub> dell'atomo di krypton 86 ( <sup>86</sup> Kr).
Massa [M]	kilogrammo	kg	Il kilogrammo è l'unità di massa ed è eguale alla massa del prototipo internazionale, un cilindro di platino-iridio, che è conservato presso il Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) con sede a Sèvres (Parigi).
Temperatura termodinamica [θ]	kelvin	K	Il kelvin è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. È peraltro ammessa la misura della temperatura in gradi celsius (°C), a volte indicata con [t] per distinguerla dalla temperatura termodinamica espressa in gradi kelvin – in tal caso è opportuno indicare il tempo con la lettera greca [τ]. La conversione è T (K) = t (°C) + 273.15, ma le differenze di temperatura sono equivalenti.
Tempo [T]	secondo	s	Il secondo è l'intervallo di tempo che contiene 9'192'631'770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133 ( <sup>133</sup> Cs). È ammesso l'uso di unità di misura quali il minuto (min), l'ora (hr) e il giorno.
Quantità di sostanza [m]	mole	mol	La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari (atomi, ioni, molecole, particelle, ecc.) quanti sono gli atomi in 0.012 kg di carbonio 12 ( <sup>12</sup> C). Si noti che si fa spesso uso, per ragioni di convenienza pratica, della kilomole (kmol), che è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 12 kg di <sup>12</sup> C.
Intensità di corrente elettrica [i]	ampere	A	L'ampere è l'intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di 1 m l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe tra i due conduttori la forza di 2·10 <sup>-7</sup> N per ogni metro di lunghezza.
Intensità luminosa [I]	candela	cd	La candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540·10 <sup>12</sup> Hz e la cui intensità energetica in quella direzione è 1/683 W per steradiante.

L'uso del S.I. è stato reso obbligatorio in Italia dal DPR n. 802 del 12 agosto 1982 (in attuazione della direttiva CEE 80/181 del 20 dicembre 1979), in tutte le attività economiche, della sanità, della sicurezza pubblica e delle operazioni amministrative, con possibilità di eccezione solo per i settori in cui convenzioni o accordi internazionali vincolanti l'Italia o l'Unione Europea impongono l'impiego di unità diverse (ad esempio, in aviazione, si indicano le quote in piedi e le distanze in miglia).

In generale, è ammesso l'impiego di differenti unità di misura, ma quelle SI devono essere sempre presenti ed in carattere dominante. Gli strumenti di misura possono impiegare solo unità di misura legali. Le principali pubblicazioni scientifiche e tecniche internazionali richiedono sempre e, spesso, esclusivamente l'utilizzo di unità di misura SI.

**A.IV. Unità di misura derivate**

Tutte le grandezze fisiche diverse da quelle fondamentali possono essere quantificate sfruttando le relazioni che le legano a queste ultime. Ad esempio, un'area ed un volume possono essere misurati utilizzando due e tre volte, rispettivamente, l'unità di misura della lunghezza.

Le unità di misura definite combinando unità di misura fondamentali e non direttamente per confronto con campioni sono dette *unità derivate*. Nel Sistema Internazionale, una caratteristica delle unità di misura derivate è che queste sono ottenute combinando le unità fondamentali senza necessità di coefficienti moltiplicativi. Ad esempio, l'unità di misura della forza, il newton, è definita come segue:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Invece, il kilogrammo-forza impiegato nel sistema degli ingegneri (Sistema Tecnico), essendo la costante di gravità pari a  $9.80665 \text{ m/s}^2$ , è tale che:

$$1 \text{ kg}_f = 9.80665 \text{ N}$$

Le altre principali unità di misura derivate utilizzate in termofluidodinamica sono:

- energia                      joule                      J                       $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$
- potenza                      watt                      W                       $1 \text{ W} = 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$
- pressione                      pascal                      Pa                       $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$

Il Sistema Internazionale prevede l'uso del joule sia per l'energia meccanica che per il calore, sancendone quindi l'equivalenza meccanica. La caloria ( $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$ ) non è contemplata. Si noti che il kilowattora è un'unità di energia e non di potenza ( $1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kJ}$ )

Unità di misura ancora usate nella valutazione della viscosità, seppur estranee al Sistema Internazionale e quindi da evitare, sono le seguenti:

- viscosità dinamica      poise                      P                       $1 \text{ P} = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s} \text{ (kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} \text{ o N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}\text{)}$
- viscosità cinematica      stoke                      St                       $1 \text{ St} = 0.0001 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

In realtà, per ragioni di ordine pratico, è più diffuso l'impiego dei seguenti sottomultipli:

- viscosità dinamica      centipoise              cP                       $1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
- viscosità cinematica      centistoke              cSt                       $1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

La viscosità dinamica dell'acqua allo stato liquido e temperatura ambiente ( $20^\circ\text{C}$ ) è pari a circa 1 cP, la sua viscosità cinematica è pari a circa 1 cSt. La viscosità di oli lubrificanti in condizioni di lavoro tipiche ( $20^\circ\text{C}\div 120^\circ\text{C}$ ) varia tra 10 e 1000 cP (dinamica) e tra 10 e 1000 cSt (cinematica).

Infine, esiste un'ampia casistica di unità di misura non appartenenti al Sistema Internazionale e tuttavia prescritte in taluni ambiti applicativi, per ragioni di standardizzazione, oppure preferite o comunque assai diffuse per consuetudine o praticità di impiego. In quest'ultimo

caso rientrano le varie unità di misura della pressione alternative al pascal e ai suoi multipli o sottomultipli:

• bar	bar	1 bar = $10^5$ Pa
• atmosfera standard	atm	1 atm = 101'325 Pa = 1.01325 bar
• atmosfera tecnica	at (o ata)	1 at = $9.80665 \cdot 10^4$ Pa (= $1 \text{ kg}_f \text{ cm}^{-2}$ )
• libbra-forza per pollice quadro	psi	1 psi ( <i>pound per square inch</i> ) = 6895 Pa
• millimetro di mercurio	mm Hg	1 mm Hg (1 Torr) = 133 Pa
• millimetro d'acqua	mm H <sub>2</sub> O	1 mm H <sub>2</sub> O = 9.80665 Pa

### A.V. Convenzioni formali

Nella scrittura della misura delle grandezze fisiche occorre rispettare alcune convenzioni formali. Non si tratta di una semplice questione di eleganza, in quanto molte delle regole sotto elencate sono prescritte dalla norma CNR-UNI 10003 (l'UNI è l'Ente di Unificazione Italiano e, in genere, recepisce le norme CEN dell'Unione Europea e ISO per il mondo).

Tra le altre, è necessario attenersi alle seguenti prescrizioni:

- l'indicazione delle unità di misura deve obbligatoriamente seguire ogni misura numerica, in simbolo e non per esteso (ad es., 1 N, 10 J, 100 W)
- se non segue un'indicazione numerica, ad esempio se è impiegato all'interno di una frase, il nome dell'unità di misura va invece riportato per esteso e con iniziale sempre minuscola, anche se deriva da un nome proprio (ad esempio, "l'unità di misura della pressione è il newton")
- dopo il simbolo dell'unità di misura non va mai il puntino (neanche dopo min o atm)
- per separatore decimale si può usare un punto o, solo in Italia, una virgola
- occorre utilizzare, quando possibile, le unità di misura derivate (N, J, W, Pa, ecc.)
- è spesso opportuno scandire a gruppi di 3 le cifre di un numero molto lungo, sia prima che dopo il separatore decimale, impiegando uno spazio, un puntino in alto o un apostrofo in alto per separare i vari gruppi (ad esempio, 1'234.567'89)
- sono consentiti multipli e sottomultipli delle unità fondamentali solo per un fattore 1000; tuttavia, è ammesso l'uso di alcune grandezze come, ad esempio, il centimetro ( $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ ) o il bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ )
- è ammesso l'uso del litro ( $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ ), con possibilità di utilizzare sia L che l (lettera maiuscola o minuscola) per il simbolo dell'unità di misura
- i prefissi da anteporre al simbolo dell'unità di misura per indicare i principali multipli e sottomultipli sono i seguenti: tera ( $T \Leftrightarrow \cdot 10^{12}$ ), giga ( $G \Leftrightarrow \cdot 10^9$ ), mega ( $M \Leftrightarrow \cdot 10^6$ ), kilo ( $k \Leftrightarrow \cdot 10^3$ , con il k di kilo sempre in minuscolo), milli ( $m \Leftrightarrow \cdot 10^{-3}$ ), micro ( $\mu \Leftrightarrow \cdot 10^{-6}$ ), nano ( $n \Leftrightarrow \cdot 10^{-9}$ ), pico ( $p \Leftrightarrow \cdot 10^{-12}$ )
- si considerano *cifre significative* la prima (da sinistra a destra) diversa da zero e tutte quelle che la seguono, compresi gli zeri (ad esempio, le cifre significative nella misura 0.001'234 m sono solo quattro, e la misura può essere più convenientemente espressa nella forma 1.234 mm); va in generale considerato che il numero di cifre significative di una misura numerica può essere sfruttato per fornire un'informazione sull'accuratezza con cui si conosce la grandezza fisica misurata (ad esempio, 10'000 W può significare

che la misura ha accuratezza dell'ordine di 1 W, mentre, se l'accuratezza è dell'ordine di 100 W, è più conveniente scrivere 10.0 kW o  $1.00 \cdot 10^4$  W)

- se nell'indicazione dell'unità di misura si impiegano a denominatore due o più simboli, è opportuno raggrupparli entro parentesi; ad esempio,  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$  si può anche scrivere  $W/(m \cdot K)$ , che è perfettamente equivalente, mentre scrivere  $W/m \cdot K$  può ingenerare confusione, poiché può essere inteso come  $(W/m) \cdot K$

**ESERCIZI UNITA' B – SOMMARIO****B. PROPRIETÀ E STATI TERMODINAMICI**

- B.I. Stato di una sostanza pura: liquido compresso**
- B.II. Stato e proprietà di una sostanza pura: liquido sottoraffreddato**
- B.III. Stato di una sostanza pura: miscela satura liquido-vapore**
- B.IV. Stato e proprietà di una sostanza pura: miscela satura liquido-vapore**
- B.V. Stato di una sostanza pura: miscela satura liquido-vapore (2)**
- B.VI. Stato di una sostanza pura: vapore surriscaldato**
- B.VII. Stato e proprietà di una sostanza pura: vapore surriscaldato**
- B.VIII. Stato e proprietà di una sostanza pura: vapore surriscaldato (2)**
- B.IX. Stato e proprietà di una sostanza pura: vapore surriscaldato (3)**
- B.X. Volume di un vapore surriscaldato**
- B.XI. Volume di un gas ideale**
- B.XII. \*Proprietà di un gas reale (1)**
- B.XIII. \*Proprietà di un gas reale (2)**
- B.XIV. \*Proprietà dell'aria come gas ideale**
- B.XV. \*Proprietà dell'aria come gas reale**
- B.XVI. \*Proprietà di un gas reale (3)**

**B.I. Stato di una sostanza pura: liquido compresso**– Problema

Si individui lo stato (liquido, miscela saturo liquido-vapore, gas) di una quantità di acqua a temperatura 70°C e pressione 0.40 bar.

– Dati

$$T = 70^\circ\text{C}$$

$$p = 0.40 \text{ bar} = 40 \text{ kPa}$$

– Determinare

Stato.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Dalle tabelle si ricava la pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura T data, pari a 70°C:

$$p_{\text{sat}@T} = 31.19 \text{ kPa}$$

Si verifica immediatamente che la pressione è superiore a quella di saturazione:

$$p > p_{\text{sat}@T}$$

Pertanto, lo stato dell'acqua in esame è quello di liquido compresso (ovvero sottoraffreddato).

– Commenti

“Liquido compresso” e “liquido sottoraffreddato” sono espressioni equivalenti.

**B.II. Stato e proprietà di una sostanza pura: liquido sottoraffreddato**– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua a pressione 8.0 MPa e temperatura 523 K. Inoltre, se ne determini la densità.

– Dati

$$T = 523 \text{ K} = 250^\circ\text{C}$$

$$p = 8.0 \text{ MPa}$$

– Determinare

Stato.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– *Soluzione*

Dalle tabelle si ricava la temperatura di saturazione dell'acqua alla pressione  $p$  data, pari a 8.0 MPa:

$$T_{\text{sat}@p} = 295.06^\circ\text{C}$$

Si verifica immediatamente che la temperatura è inferiore a quella di saturazione:

$$T < T_{\text{sat}@p}$$

Pertanto, lo stato dell'acqua in esame è quello di liquido sottoraffreddato (ovvero compresso). Essendo i liquidi poco comprimibili, il volume specifico della quantità d'acqua in esame è molto simile al volume specifico del liquido saturo alla stessa temperatura  $T$ , pari a  $250^\circ\text{C}$ . Da tabella si ricava:

$$v \cong v_{1,\text{sat}@T} = 0.001251 \text{ m}^3/\text{kg}$$

La densità massica è infine pari al reciproco del volume specifico.

$$\rho = 1/v = 799 \text{ kg/m}^3$$

– *Commenti*

Con l'eccezione dell'entalpia, le proprietà termodinamiche (volume specifico, energia interna specifica, entropia specifica) di un liquido sottoraffreddato ad una certa pressione e temperatura sono in generale assimilabili alle proprietà del liquido saturo alla stessa temperatura, a meno che il liquido non si trovi a pressioni notevolmente maggiori del valore di saturazione.

Nel caso in esame si ha, per l'energia interna:

$$u \cong u_{1,\text{sat}@T} = 1080.39 \text{ kJ/kg}$$

e, per l'entropia:

$$s \cong s_{1,\text{sat}@T} = 2.7927 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Per quel che concerne l'entalpia specifica, si può rilevare che:

$$\begin{aligned} h &= u + p \cdot v \cong u_{1,\text{sat}@T} + p \cdot v_{1,\text{sat}@T} \equiv u_{1,\text{sat}@T} + p_{\text{sat}@T} \cdot v_{1,\text{sat}@T} + (p - p_{\text{sat}@T}) \cdot v_{1,\text{sat}@T} = \\ &= h_{1,\text{sat}@T} + (p - p_{\text{sat}@T}) \cdot v_{1,\text{sat}@T} \end{aligned}$$

Per stimare l'entalpia di un liquido sottoraffreddato si deve quindi sommare all'entalpia del liquido saturo posto alla stessa temperatura la differenza tra pressione del liquido e pressione di saturazione (alla stessa temperatura) moltiplicata per il volume specifico del liquido saturo. L'entalpia specifica del liquido saturo e la pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura data  $T$  di  $250^\circ\text{C}$  si ricavano da tabella:

$$p_{\text{sat}@T} = 3.973 \text{ MPa} = 3.973 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$h_{1,\text{sat}@T} = 1085.36 \text{ kJ/kg} = 1.08536 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Pertanto, l'entalpia specifica della quantità di acqua considerata vale:

$$h = h_{1,\text{sat}@T} + (p - p_{\text{sat}@T}) \cdot v_{1,\text{sat}@T} \cong 1.09040 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = 1090.40 \text{ kJ/kg}$$

**B.III. Stato di una sostanza pura: miscela satura liquido-vapore**– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua a temperatura 300.15 K e pressione 3.600 kPa.

– Dati

$$T = 300.15 \text{ K} = 27.00^\circ\text{C}$$

$$p = 3.600 \text{ kPa}$$

– Determinare

Stato.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

In tabella sono disponibili i valori della pressione di saturazione dell'acqua a temperatura 25°C e a temperatura 30°C:

$$T_1 = 25^\circ\text{C}$$

$$p_1 \equiv p_{\text{sat}@T_1} = 3.169 \text{ kPa}$$

$$T_2 = 30^\circ\text{C}$$

$$p_2 \equiv p_{\text{sat}@T_2} = 4.246 \text{ kPa}$$

La pressione di saturazione alla temperatura T data si può ricavare per interpolazione lineare dei dati disponibili:

$$p_{\text{sat}@T} = p_1 + (p_2 - p_1) \cdot \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = 3.600 \text{ kPa}$$

Tale valore coincide con la pressione dell'acqua in esame, che quindi è in condizioni di saturazione.

– Commenti

Non sono disponibili informazioni utili a determinare il titolo, vale a dire la frazione in massa della quantità di acqua considerata che si trova nello stato di vapore. Pertanto, lo stato non è determinato univocamente e può essere quello di liquido saturo, miscela satura liquido-vapore o vapore saturo secco.

**B.IV. Stato e proprietà di una sostanza pura: miscela satura liquido-vapore**– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua con densità 5.0 g/L e pressione 2.321 bar. Si determinino inoltre la temperatura dell'acqua e l'entalpia specifica.

– Dati

$$\rho = 5.0 \text{ g/L} = 5.0 \text{ kg/m}^3$$

$$p = 2.321 \text{ bar}$$

– Determinare

Stato, temperatura, entalpia specifica.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Il volume specifico è pari all'inverso della densità massica:

$$v = 1/\rho = 0.200 \text{ m}^3/\text{kg}$$

I valori del volume specifico alla pressione  $p$  data in condizioni di saturazione possono essere ricavati dalle tabelle delle proprietà termodinamiche dell'acqua. In particolare, si ricava che il volume specifico del liquido saturo vale:

$$v_l \equiv v_{l,\text{sat}@p} = 0.001065 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Il volume specifico del vapore saturo secco vale:

$$v_v \equiv v_{v,\text{sat}@p} = 0.7706 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Si verifica immediatamente che:

$$v_l < v < v_v$$

Pertanto, l'acqua in esame è in condizioni di saturazione. La sua temperatura è pari alla temperatura di saturazione alla pressione  $p$  data, che da tabella risulta essere:

$$T \equiv T_{\text{sat}@p} = 125^\circ\text{C}$$

Il titolo, definito come il rapporto tra massa della fase gassosa e massa totale della miscela saturo liquido-vapore, si può calcolare sapendo che:

$$v = v_l + x \cdot (v_v - v_l) \equiv (1 - x) \cdot v_l + x \cdot v_v$$

Dalla relazione precedente si ottiene:

$$x = \frac{(v - v_l)}{(v_v - v_l)} = 0.2585 \equiv 25.85\%$$

L'entalpia specifica si determina a partire dalle entalpie del liquido saturo e del vapore saturo secco alla temperatura  $T$  dell'acqua di  $125^\circ\text{C}$ :

$$h_l \equiv h_{l,\text{sat}@T} = 524.99 \text{ kJ/kg}$$

$$h_v \equiv h_{v,\text{sat}@T} = 2713.5 \text{ kJ/kg}$$

L'entalpia della miscela saturo liquido-vapore vale quindi:

$$h = h_l + x \cdot (h_v - h_l) = 1090.7 \text{ kJ/kg}$$

– Commenti

Si sarebbe avuto un liquido sotto-raffreddato per  $v < v_l$ , un vapore surriscaldato per  $v > v_v$ .

**B.V. Stato di una sostanza pura: miscela satura liquido-vapore (2)**

– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua con massa 2.000 kg, volume 450 L e temperatura 115°C.

– Dati

$m = 2.000 \text{ kg}$   
 $V = 450 \text{ L} = 0.450 \text{ m}^3$   
 $T = 115^\circ\text{C}$

– Determinare

Stato.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Il volume specifico può essere ricavato attraverso la sua definizione:

$$v = V / m = 0.225 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Da tabella si ricavano i valori del volume specifico dell'acqua alla temperatura T data, in condizioni di saturazione. In particolare, il volume specifico del liquido saturo ed il volume specifico del vapore saturo secco valgono:

$$v_l \equiv v_{l,\text{sat}@T} = 0.001056 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$v_v \equiv v_{v,\text{sat}@T} = 1.0366 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Si verifica immediatamente che:

$$v_l < v < v_v$$

Pertanto, lo stato dell'acqua in esame è quello di miscela satura liquido-vapore (o “vapore saturo umido”). La pressione dell'acqua è quindi pari alla pressione di saturazione alla temperatura T data di 115°C, che da tabella risulta essere:

$$p \equiv p_{\text{sat}@T} = 0.16906 \text{ MPa}$$

Il titolo del vapore saturo è infine pari a:

$$x = \frac{(v - v_l)}{(v_v - v_l)} = 0.2163 \equiv 21.63\%$$

**B.VI. Stato di una sostanza pura: vapore surriscaldato**

– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua con pressione 14.5 bar e temperatura 470.00 K.

– Dati

$$p = 14.5 \text{ bar} = 1.45 \text{ MPa}$$

$$T = 470.00 \text{ K} = 196.85^\circ\text{C}$$

– Determinare

Stato.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

In tabella sono disponibili i valori della temperatura di saturazione dell'acqua a pressione 1.40 MPa e 1.50 MPa:

$$p_1 = 1.40 \text{ MPa}$$

$$T_1 \equiv T_{\text{sat}@p_1} = 195.07^\circ\text{C}$$

$$p_2 = 1.50 \text{ MPa}$$

$$T_2 \equiv T_{\text{sat}@p_2} = 198.32^\circ\text{C}$$

La temperatura di saturazione alla pressione  $p$  data, pari a 1.45 MPa, può essere quindi ricavata per interpolazione lineare dei dati disponibili:

$$T_{\text{sat}@p} = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \equiv \frac{T_1 + T_2}{2} = 196.70^\circ\text{C}$$

Essendo la temperatura dell'acqua maggiore, seppur di poco, della temperatura di saturazione alla pressione data, si ha a che fare con un vapore surriscaldato.

**B.VII. Stato e proprietà di una sostanza pura: vapore surriscaldato**

– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua con massa 5.00 kg, posta a temperatura 400°C e pressione 30 bar. Si determinino inoltre il volume e l'energia interna dell'acqua.

– Dati

$$m = 5.00 \text{ kg}$$

$$T = 400^\circ\text{C}$$

$$p = 30 \text{ bar} = 3.0 \text{ MPa}$$

– Determinare

Stato, volume totale, energia interna totale.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Da tabella si ricava che la temperatura di saturazione dell'acqua alla pressione  $p$  data di 3.0 MPa è pari a:

$$T_{\text{sat}@p} = 233.90^{\circ}\text{C}$$

Poiché la temperatura  $T$  dell'acqua è superiore a tale valore, si ha a che fare con un vapore surriscaldato.

Da tabella si ricava che, alla pressione  $p$  e alla temperatura  $T$  date, il volume specifico e l'energia interna specifica del vapore d'acqua surriscaldato valgono, rispettivamente:

$$v \equiv v_{v@p\&T} = 0.09936 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$u \equiv u_{v@p\&T} = 2932.8 \text{ kJ/kg}$$

Il volume totale  $V$  e l'energia interna totale  $U$  sono infine pari a:

$$V = m \cdot v = 0.50 \text{ m}^3$$

$$U = m \cdot u = 14664 \text{ kJ} = 14.7 \text{ MJ}$$

**B.VIII. Stato e proprietà di una sostanza pura: vapore surriscaldato (2)**

– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua posta a pressione 0.80 MPa e temperatura 880°C. Si determini inoltre l'entalpia dell'acqua.

– Dati

$$p = 0.80 \text{ MPa}$$

$$T = 880^{\circ}\text{C}$$

– Determinare

Stato, entalpia specifica.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Si può facilmente verificare che la sostanza in esame è un vapore d'acqua surriscaldato. Infatti, si ricava da tabelle che, a pressione 0.80 MPa, la temperatura di saturazione dell'acqua è pari a 295.06°C, valore ben inferiore alla temperatura  $T$  data, pari a 880°C.

Nelle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato non sono disponibili, alla pressione  $p$  data di 0.80 MPa, i valori delle proprietà specifiche riferite alla temperatura  $T$  data di 880°C, ma solo quelli relativi alla temperatura di 800°C e alla temperatura di 900°C. Con particolare riferimento all'entalpia specifica, si ha che:

$$T_1 = 800^\circ\text{C}$$

$$h_1 \equiv h_{v@p\&T_1} = 4155.6 \text{ kJ/kg}$$

$$T_2 = 900^\circ\text{C}$$

$$h_2 \equiv h_{v@p\&T_2} = 4393.7 \text{ kJ/kg}$$

L'entalpia specifica si può quindi ricavare per interpolazione lineare dei valori sopra riportati.

$$h \equiv h_{v@p\&T} = h_1 + (h_2 - h_1) \cdot \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = 4346.1 \text{ kJ/kg}$$

### B.IX. Stato e proprietà di una sostanza pura: vapore surriscaldato (3)

– Problema

Si individui lo stato di una quantità di acqua posta a pressione 1.05 MPa e temperatura 880°C. Si determini inoltre l'energia interna specifica dell'acqua.

– Dati

$$p = 1.05 \text{ MPa}$$

$$T = 880^\circ\text{C}$$

– Determinare

Stato, energia interna specifica.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Si può facilmente verificare che la sostanza in esame è un vapore d'acqua surriscaldato. Infatti, sono reperibili in tabella i valori della temperatura di saturazione dell'acqua a  $p_A=1.00$  MPa e  $p_B=1.10$  MPa; la temperatura di saturazione alla pressione è data di 1.05 MPa si ottiene tramite interpolazione lineare di tali valori (che in questo caso consiste, evidentemente, in una media secca):

$$T_{\text{sat}@p} = T_{\text{sat}@p_A} + (T_{\text{sat}@p_B} - T_{\text{sat}@p_A}) \cdot \frac{p - p_A}{p_B - p_A} \equiv \frac{T_{\text{sat}@p_B} + T_{\text{sat}@p_A}}{2} = \frac{179.91 + 184.09}{2} = 182.00^\circ\text{C}$$

L'acqua in esame si trova a temperatura largamente superiore.

Nelle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato sono disponibili, a pressione  $p_A=1.00$  MPa, i valori dell'energia interna specifica a temperatura  $T_1=800^\circ\text{C}$  e a temperatura  $T_2=900^\circ\text{C}$ :

$$p_A = 1.00 \text{ MPa}, T_1 = 800^\circ\text{C}$$

$$u_{A1} \equiv u_{v@p_A\&T_1} = 3660.4 \text{ kJ/kg}$$

$$p_A = 1.00 \text{ MPa}, T_2 = 900^\circ\text{C}$$

$$u_{A2} \equiv u_{v@p_A\&T_2} = 3852.2 \text{ kJ/kg}$$

A temperatura 880°C si ricava, per interpolazione lineare dei valori sopra riportati:

$$u_A \equiv u_{v@p_A \& T} = u_{A1} + (u_{A2} - u_{A1}) \cdot \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = 3813.8 \text{ kJ/kg}$$

A pressione  $p_B=1.20$  MPa, i valori dell'energia interna specifica a temperatura  $T_1=800^\circ\text{C}$  e a temperatura  $T_2=900^\circ\text{C}$  sono pari a:

$$p_B = 1.20 \text{ MPa}, \quad T_1 = 800^\circ\text{C}$$

$$u_{B1} \equiv u_{v@p_A \& T_1} = 3659.7 \text{ kJ/kg}$$

$$p_B = 1.20 \text{ MPa}, \quad T_2 = 900^\circ\text{C}$$

$$u_{B2} \equiv u_{v@p_A \& T_2} = 3851.6 \text{ kJ/kg}$$

A temperatura 880°C si ricava quindi, per interpolazione lineare:

$$u_B \equiv u_{v@p_B \& T} = u_{B1} + (u_{B2} - u_{B1}) \cdot \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = 3813.2 \text{ kJ/kg}$$

Infine, eseguendo un'ulteriore interpolazione lineare dei valori dell'energia interna specifica precedentemente determinati, si ottiene:

$$u \equiv u_{v@p \& T} = u_A + (u_B - u_A) \cdot \frac{p - p_A}{p_B - p_A} = 3813.7 \text{ kJ/kg}$$

### **B.X. Volume di un vapore surriscaldato**

– Problema

Data una quantità di acqua con massa 2.20 kg, temperatura 100°C e pressione 0.1 bar, si determini il volume da essa occupato.

– Dati

$$m = 2.20 \text{ kg}$$

$$T = 100^\circ\text{C}$$

$$p = 0.1 \text{ bar} = 0.01 \text{ MPa}$$

– Determinare

Volume occupato.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Da tabella si ricava che la pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura T data di 100°C vale:

$$p_{\text{sat}@T} = 0.10133 \text{ MPa}$$

Pertanto, essendo la pressione della quantità di acqua considerata inferiore a tale valore, si ha a che fare con un vapore surriscaldato. Dalle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato si ottiene, per la temperatura  $T$  e per la pressione  $p$  di riferimento di 0.01 MPa:

$$v = v_{v@T\&p} = 17.196 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume occupato vale quindi:

$$V = m \cdot v = 37.8 \text{ m}^3$$

– Commenti

Il valore del volume specifico riportato nelle tabelle delle proprietà termodinamiche dell'acqua è stato rilevato sperimentalmente ed è quindi da ritenersi esatto (a meno, ovviamente, degli errori di misura).

Nel problema successivo, il volume specifico viene ricavato assimilando il vapore d'acqua ad un gas ideale nelle stesse condizioni di lavoro.

**B.XI. Volume di un gas ideale**

– Problema

Data una quantità di acqua con massa 2.20 kg, temperatura 100°C e pressione 0.1 bar, si determini il volume da essa occupato, ipotizzando di avere a che fare con un gas ideale e verificando la correttezza di tale ipotesi.

– Dati

$$m = 2.20 \text{ kg}$$

$$T = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$$

$$p = 0.1 \text{ bar} = 0.01 \text{ MPa} = 10'000 \text{ Pa}$$

– Determinare

Volume occupato.

– Ipotesi

Sostanza pura, gas ideale.

– Soluzione

La costante universale dei gas perfetti è pari a:

$$R_u = 8314.0 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$$

La massa molare dell'acqua è pari a (valore tabulato):

$$M = 18.015 \text{ kg}/\text{kmol}$$

La costante di gas perfetto dell'acqua è quindi pari a:

$$R = R_u / M = 461.5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ottiene:

$$v = R \cdot T / p = 17.221 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$V = m \cdot v = 37.9 \text{ m}^3$$

Per verificare se l'ipotesi di gas ideale è accettabile, si verificano i valori di temperatura ridotta e pressione ridotta. A tal riguardo, si ricava da tabella che la temperatura e la pressione di punto critico dell'acqua sono pari a:

$$T_c = 647.3 \text{ K}$$

$$p_c = 22.09 \text{ MPa} = 22.09 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

La temperatura ridotta è pari a:

$$T_r = T / T_c = 0.5765$$

Tale valore non permette di confermare l'ipotesi. Occorre perciò verificar anche la pressione ridotta, che risulta essere pari a:

$$p_r = p / p_c = 0.000453$$

Poiché  $p_r \ll 1$ , è lecito assumere che l'acqua, nelle condizioni in esame, si comporti come un gas ideale.

– Commenti

A conferma della validità dell'ipotesi di lavoro, il valore calcolato per  $v$  mediante l'equazione di stato dei gas perfetti è pressoché identico a quello misurabile sperimentalmente, che dalle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato si ricava essere pari a  $17.196 \text{ m}^3/\text{kg}$  (vedi problema precedente).

Quando si impiega l'equazione di stato dei gas, è consigliabile impiegare solo le unità di misura base del Sistema Internazionale (Pa, m, kg, K), convertendo in esse tutti i multipli ed i sotto-multipli (ad es., MPa, bar o kPa in Pa), nonché i gradi celsius in gradi kelvin.

## B.XII. \* Proprietà di un gas reale (1)

– Problema

Data una quantità di acqua con temperatura  $350^\circ\text{C}$  e pressione  $3.50 \text{ MPa}$ , se ne determini il volume specifico.

– Dati

$$T = 350^\circ\text{C} = 623 \text{ K}$$

$$p = 3.50 \text{ MPa} = 3.50 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

– Determinare

Volume specifico.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Da tabella si ricava che la costante di gas perfetto dell'acqua è pari a:

$$R = 0.4615 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 461.5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Per verificare se si ha a che fare con un gas ideale, si devono verificare i valori di temperatura ridotta e pressione ridotta. A tal riguardo, si ricava da tabella che la temperatura e la pressione di punto critico dell'acqua sono pari a:

$$T_c = 647.3 \text{ K}$$

$$p_c = 22.09 \text{ MPa} = 22.09 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

La temperatura ridotta e la pressione ridotta della quantità di acqua in esame valgono quindi:

$$T_r = T/T_c = 0.9627$$

$$p_r = p/p_c = 0.158$$

Tali valori non permettono di asserire che l'acqua, nella condizioni in esame, si comporti come un gas ideale. Infatti, calcolandone il volume specifico con l'equazione di stato dei gas ideali, si ottiene:

$$v' = R \cdot T/p = 0.08217 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Dalle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato si ottiene invece che il volume specifico rilevato sperimentalmente alla pressione  $p$  e temperatura  $T$  date, rispettivamente pari a 3.50 MPa e 350°C, vale:

$$v \equiv v_{v@p\&T} = 0.07678 \text{ m}^3/\text{kg}$$

L'errore commesso ipotizzando di avere un gas ideale si può valutare come segue:

$$\frac{|v - v'|}{v} = 0.070 = 7.0\%$$

Si può giungere ad un valore più corretto impiegando l'equazione di stato dei gas reali, in cui si introduce un fattore di compressibilità  $Z$ , determinato mediante apposito diagramma a partire dalle pressione e temperatura ridotte.

$$Z = Z(p_r, T_r) = 0.94$$

$$v'' = Z \cdot R \cdot T/p = 0.0772 \text{ m}^3/\text{kg}$$

L'errore così commesso è molto più contenuto:

$$\frac{|v - v''|}{v} = 0.006 = 0.6\%$$

### **B.XIII. \* Proprietà di un gas reale (2)**

– Problema

Data una quantità di anidride carbonica ( $\text{CO}_2$ ) con volume 500 dm<sup>3</sup>, temperatura 46°C e pressione 30 bar, se ne determini la massa.

– Dati

$$V = 500 \text{ dm}^3 = 0.500 \text{ m}^3$$

$$T = 46^\circ\text{C} = 319 \text{ K}$$

$$p = 30 \text{ bar} = 3.0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

– Determinare

Massa.

– Ipotesi

Sostanza pura.

– Soluzione

Da tabella si ricava che la temperatura e la pressione di punto critico dell'anidride carbonica (biossido di carbonio) sono:

$$T_c = 304.2 \text{ K}$$

$$p_c = 7.39 \text{ MPa} = 7.39 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Nel caso allo studio, la temperatura ridotta e la pressione ridotta sono pari a:

$$T_r = T/T_c = 1.049$$

$$p_r = p/p_c = 0.406$$

Tali valori non permettono di asserire che, nelle condizioni in esame, l'anidride carbonica si comporti come un gas ideale. Per valutare il volume specifico a partire da pressione e temperatura occorre quindi impiegare un'equazione di stato di gas reale, oppure valutando il fattore di compressibilità. Con i valori calcolati di temperatura e di pressione ridotta, da diagramma si ottiene:

$$Z = Z(p_r, T_r) = 0.83$$

La costante di gas perfetto dell'anidride carbonica, tabulata, è pari a:

$$R = 0.1889 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 188.9 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il volume specifico è quindi pari a:

$$v = Z \cdot R \cdot T/p = 0.0167 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Infine, la massa è pari a:

$$m = V/v = 30 \text{ kg}$$

**B.XIV. \* Proprietà dell'aria come gas ideale**– Problema

Verificare che l'aria secca in condizioni atmosferiche tipiche (temperatura 27°C e pressione 1 atm) si può considerare un gas perfetto.

– Dati

$$T = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$p = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

– Determinare

Fattore di compressibilità (Z).

– Ipotesi

Sostanza omogenea.

– Soluzione

L'aria, pur essendo costituita da una miscela di gas, si comporta generalmente come una sostanza pura.

La costante di gas perfetto e la temperatura e pressione di punto critico dell'aria sono tabulate:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$T_c = 132.5 \text{ K}$$

$$p_c = 3.77 \text{ MPa} = 3.77 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Nel caso allo studio, la temperatura ridotta e la pressione ridotta sono pari a:

$$T_r = T/T_c = 2.265$$

$$p_r = p/p_c = 0.027$$

Per tali valori, si può ricavare da diagramma:

$$Z = Z(p_r, T_r) \cong 1$$

L'aria ambiente in condizioni atmosferiche tipiche può pertanto essere approssimata a gas ideale.

– Commenti

Nella maggior parte dei cicli di conversione dell'energia a gas (cicli Joule, Otto, Diesel, ecc.) la composizione del fluido processato si può assimilare a quella dell'aria, sia prima che dopo la combustione. Inoltre, le condizioni di lavoro sono generalmente tali che il fluido può essere considerato un gas ideale in pressoché tutte le fasi dei suddetti cicli.

**B.XV. \* Proprietà dell'aria come gas reale**– Problema

Si determini il volume occupato da 16 kg di aria, posti a temperatura 27°C e pressione 225 atm (1 atm = 101'325 Pa).

– Dati

$$m = 16 \text{ kg}$$

$$T = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$p = 225 \text{ atm} = 2.28 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

– Determinare

Volume occupato.

– Ipotesi

Sostanza omogenea.

– Soluzione

La costante di gas perfetto e la temperatura e pressione di punto critico dell'aria sono tabulate:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$T_c = 132.5 \text{ K}$$

$$p_c = 3.77 \text{ MPa} = 3.77 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Nel caso allo studio, la temperatura ridotta e la pressione ridotta sono pari a:

$$T_r = T/T_c = 2.265$$

$$p_r = p/p_c = 6.047$$

Per tali valori, si può ricavare da diagramma:

$$Z = Z(p_r, T_r) = 1.04$$

Il volume specifico è quindi pari a:

$$v = Z \cdot R \cdot T/p = 0.00393 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Infine, il volume occupato è pari a:

$$V = m \cdot v = 0.063 \text{ m}^3$$

– Commenti

Ad alte pressioni l'aria, anche se mantenuta a temperatura ambiente, non si può considerare un gas perfetto. La differenza è tuttavia piccola e Z assume valori non molto discosti dall'unità.

**B.XVI. \* Proprietà di un gas reale (3)**

– Problema

Si determini la pressione che assume una massa di 400 kg di azoto ( $N_2$ ), mantenuta a temperatura  $-83^\circ\text{C}$  in un serbatoio con volume 2000 L.

– Dati

$$m = 400 \text{ kg}$$

$$V = 2000 \text{ L} = 2.000 \text{ m}^3$$

$$T = -83^\circ\text{C} = 190 \text{ K}$$

– Determinare

Pressione.

– Ipotesi

Gas reale.

– Soluzione

Il volume specifico può essere calcolato attraverso la sua definizione:

$$v = V/m = 5.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

La costante di gas perfetto, la temperatura di punto critico e la pressione di punto critico dell'azoto sono tabulate:

$$R = 0.2968 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 296.8 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$T_c = 126.2 \text{ K}$$

$$p_c = 3.39 \text{ MPa} = 3.39 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Nel caso allo studio, la temperatura ridotta è pari a:

$$T_r = T/T_c = 1.51$$

Tale valore non consente a priori di considerare l'azoto un gas perfetto. D'altra parte, non sono disponibili informazioni dirette sulla pressione ridotta. Si impiega allora il cosiddetto "volume pseudocritico ridotto", calcolato come segue:

$$v'_r = \frac{v}{R \cdot T_c/p_c} = 0.45$$

Per la temperatura e il volume pseudocritico ridotti precedentemente ricavati si ottiene da diagramma:

$$Z = Z(T_r, v'_r) = 0.81$$

La pressione dell'azoto nel serbatoio è quindi pari a:

$$p = Z \cdot R \cdot T/v = 9.14 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 9.14 \text{ MPa}$$

$$p = Z \cdot R \cdot T/v = 9.14 \text{ MPa}$$

Se si fosse impiegata l'equazione di gas ideale, si sarebbe ottenuta una pressione pari a:

$$p' = R \cdot T/v = 11.29 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 11.29 \text{ MPa}$$

La sovrastima sarebbe quindi stata, in percentuale:

$$\frac{|p' - p|}{p} = 0.235 = 23.5\%$$

– Commenti

Il volume pseudocritico ridotto si impiega tutte le volte che la pressione ridotta e la temperatura ridotta non sono simultaneamente note.

**ESERCIZI UNITA' C – SOMMARIO**

- C. PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA E SISTEMI CHIUSI**
- C.I. Trasformazione isocora di gas ideale**
- C.II. Trasformazione isocora di gas ideale: vano congelatore**
- C.III. Trasformazione isocora di gas ideale: cabinet per apparecchiature elettroniche**
- C.IV. Trasformazione isoterma di gas ideale**
- C.V. Trasformazione isobara di gas ideale**
- C.VI. Trasformazione isobara di gas reale**
- C.VII. Trasformazione politropica di gas ideale**
- C.VIII. \* Ciclo chiuso di un gas ideale**
- C.IX. \* Ciclo chiuso di un gas ideale (2)**
- C.X. Calore specifico di un materiale solido**
- C.XI. Calore specifico di solidi e liquidi**
- C.XII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione**
- C.XIII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione: bibita con ghiaccio**

**C.I. Trasformazione isocora di gas ideale**

– Problema

Una quantità di aria secca con massa 55 g, pressione iniziale 1.00 bar e temperatura iniziale 27°C, contenuta in un recipiente chiuso e indeformabile, viene riscaldata fino ad una temperatura di 200°C.

Determinare il volume e la pressione finale dell'aria, assimilandola ad un gas ideale (o perfetto). Inoltre, calcolare il lavoro e il calore scambiati durante la trasformazione, assumendo che il valore del calore specifico a volume costante dell'aria non vari significativamente con la temperatura e sia circa pari a 0.73 kJ/(kg·K).

– Dati

Sostanza: aria secca

$$m = 55 \text{ g} = 0.055 \text{ kg}$$

$$p_1 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

recipiente chiuso e indeformabile  $\Rightarrow 1 \rightarrow 2$ ) Trasformazione isocora  $\Rightarrow V_2 = V_1$

$$T_2 = 200^\circ\text{C} = 473 \text{ K}$$

$$c_v = 0.73 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 730 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

– Determinare

Volume finale ( $V_2$ ), pressione finale ( $p_2$ ), lavoro scambiato ( $L_{12}$ ), calore scambiato ( $Q_{12}$ ).

– Ipotesi

Recipiente perfettamente chiuso ed indeformabile, gas ideale.

– Soluzione

La trasformazione è, evidentemente isocora: il volume del recipiente, chiuso e indeformabile, in cui l'aria è contenuta non varia durante il riscaldamento. Pertanto, il volume iniziale dell'aria stessa è pari al volume finale, e lo stesso vale per i volumi specifici iniziale e finale.

La costante di gas perfetto dell'aria secca si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

Il volume specifico iniziale (stato 1), coincidente con quello finale, si ricava mediante l'equazione di stato:

$$v_1 \equiv v_2 = RT_1 / p_1 = 0.861 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume totale vale:

$$V_1 \equiv V_2 = mv_1 = 0.047 \text{ m}^3$$

La pressione finale (stato 2) è pari a:

$$p_2 = RT_2 / v_2 = 158 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 158 \text{ kPa}$$

Per ciò che concerne il lavoro ed il calore scambiati, il primo principio della termodinamica permette di scrivere la seguente equazione:

$$\Delta u_{12} = q_{12} - \ell_{12} = q_{12} - \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

ovvero

$$\Delta U_{12} = Q_{12} - L_{12} = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Essendo nulla la variazione di volume (specifico e totale), il lavoro scambiato di tipo meccanico (l'unico possibile in un sistema semplice) è necessariamente nullo. Non è invece nullo il calore scambiato. A tal riguardo, il calore specifico a volume costante è definito come segue:

$$c_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{v=\text{cost}}$$

Per un gas ideale, la cui energia interna (specifico e totale) dipende solo dalla temperatura, si desume che:

$$c_v = \frac{du}{dT} \Rightarrow \Delta U_{12} = m\Delta u_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT$$

Essendo costante per ipotesi il  $c_v$  dell'aria (tale approssimazione è in generale accettabile per variazioni ridotte di temperatura, se si utilizza il valore medio di  $c_v$  nell'intervallo di variazione), il calore complessivamente scambiato durante la trasformazione in esame si può valutare come segue:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \cong m c_{v,\text{medio}} (T_2 - T_1) = 6946 \text{ J} = 6.9 \text{ kJ}$$

Come logico, il calore è positivo, quindi fornito all'aria.

– Commenti

Essendo la pressione sempre molto inferiore a quella di punto critico, pari a 3.77 MPa, l'aria può essere assimilata ad un gas ideale durante tutta la trasformazione.

I calori specifici a pressione costante e a volume costante dipendono in generale dalla temperatura, ma in presenza di escursioni termiche limitate si possono assumere costanti e pari al loro valore medio nell'intervallo di variazione.

**C.II. Trasformazione isocora di gas ideale: vano congelatore**

– Problema

Lo scomparto congelatore di un frigorifero domestico presenta dimensioni interne 50 cm x 30 cm x 40 cm (larghezza x altezza x profondità). Durante le operazioni di riempimento, negli spazi vuoti del vano si va ad inserire aria in condizioni ambiente (valori tipici in un'abitazione: temperatura 25°C, pressione 1 bar). Una volta chiuso il portello, la temperatura dell'aria si porta rapidamente al valore di esercizio del vano (ad esempio, -18°C per un congelatore \*\*\*). Per effetto di tale raffreddamento si ha che, se le guarnizioni di tenuta del portello mantengono il vano ben sigillato, la pressione dell'aria al suo interno scende al di sotto del valore ambiente.

Assumendo che il vano venga riempito per il 25% del volume da alimenti congelati, determinare la pressione che si instaura al suo interno dopo che l'aria, da considerarsi secca, si è completamente raffreddata.

– Dati

Sostanza: aria secca

$$L_1 = 50 \text{ cm} = 0.50 \text{ m (larghezza)}$$

$$L_2 = 30 \text{ cm} = 0.30 \text{ m (altezza)}$$

$$L_3 = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m (profondità)}$$

$$r = 25\% = 0.25 \text{ (frazione di riempimento)}$$

$$p_1 \equiv p_{\text{atm}} = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 \equiv T_{\text{atm}} = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$$

$$T_2 = -18^\circ\text{C} = 255 \text{ K}$$

– Determinare

Pressione finale ( $p_2$ ).

– Ipotesi

Vano congelatore perfettamente sigillato, pareti del vano indeformabili, aria gas ideale.

– Soluzione

Poiché, dopo la chiusura, la configurazione interna del vano congelatore non varia, la trasformazione può essere considerata isocora. Il volume della parte di vano occupata dall'aria si calcola come segue:

$$V_1 \equiv V_2 = (1 - r)L_1L_2L_3 = (1 - 0.25) \cdot 0.50 \cdot 0.30 \cdot 0.40 = 0.045 \text{ m}^3$$

Se l'aria non trafile attraverso le guarnizioni, il vano può essere considerato un sistema chiuso. La massa di aria al suo interno può essere calcolata mediante l'equazione di stato dei gas ideali, in cui si introducono i valori iniziali (stato 1) delle proprietà termodinamiche e la costante di gas perfetto  $R$ , che per l'aria è pari a  $287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ :

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{100000 \cdot 0.045}{287.0 \cdot 298} = 0.0526 \text{ kg}$$

Sempre mediante l'equazione di stato è possibile stimare la pressione finale (stato 2) dell'aria:

$$p_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{0.0526 \cdot 287 \cdot 255}{0.045} = 85578 \text{ Pa} = 0.86 \text{ bar}$$

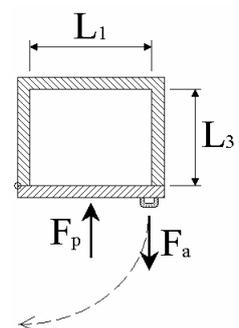
– Commenti

La forza risultante delle pressioni sul portello frontale del vano congelatore,  $F_p$ , è data dal bilancio delle forze di pressione esterne ed interne. Dalla definizione di pressione (forza normale per unità di superficie) si desume:

$$F_p = p_{\text{atm}} \cdot L_1 \cdot L_2 - p_2 \cdot L_1 \cdot L_2 = (p_1 - p_2) \cdot L_1 \cdot L_2 = 2163 \text{ N}$$

La forza  $F_p$  si può considerare applicata nel baricentro del portello. Supponendo che la maniglia di apertura sia posta all'estremità laterale del portello, si verifica facilmente che il momento della forza da esercitare sulla maniglia,  $F_a$ , deve vincere il momento della risultante delle forze di pressione:

$$F_a L_1 = F_p L_1 / 2$$



Da ciò si ricava che la forza  $F_a$  vale:

$$F_a = F_p/2 = 1082 \text{ N} = 1.1 \text{ kN}$$

Lo sforzo è considerevole: quand'anche si riuscisse ad applicarlo, si andrebbero a sollecitare notevolmente i cardini del portello (che, per garantire l'equilibrio alla traslazione, sono soggetti ad una forza uguale a quella applicata alla maniglia). Fortunatamente, il portello non è mai a perfetta tenuta e la depressione interna riesce a richiamare aria dall'esterno, attraverso le fessure tra le guarnizioni, finché la pressione interna non torna uguale al valore atmosferico. È tuttavia esperienza comune che, per qualche tempo dopo la chiusura, la riapertura di un vano congelatore risulta difficoltosa.

### C.III. Trasformazione isocora di gas ideale: cabinet per apparecchiature elettroniche

#### – Problema

Un cabinet per apparecchiature elettroniche è costituito da un vano sigillato con dimensioni interne 450 mm x 1500 mm x 400 mm (larghezza x altezza x profondità). All'interno del vano si trovano apparecchiature elettroniche con sviluppo volumetrico e capacità termica trascurabili, alimentate in corrente continua e con tensione di alimentazione 12 V. Tali apparecchiature assorbono 11.6 A in condizioni di carico massimo. Al momento dell'avviamento, il vano è occupato da aria in condizioni ambiente tipiche (temperatura 25°C, pressione 1 bar).

Determinare in quanto tempo si raggiungerebbe la massima temperatura ammissibile dall'elettronica, pari a 80°C, in condizioni di carico massimo.

#### – Dati

Sostanza: aria secca

$$L_1 = 450 \text{ mm} = 0.450 \text{ m (larghezza)}$$

$$L_2 = 1500 \text{ mm} = 1.500 \text{ m (altezza)}$$

$$L_3 = 400 \text{ mm} = 0.400 \text{ m (profondità)}$$

$$p_1 = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 \equiv T_{\text{amb}} = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$$

$$T_2 \equiv T_{\text{max}} = 80^\circ\text{C} = 353 \text{ K}$$

$$\Delta V_{\text{cc}} = 12 \text{ V}$$

$$I_{\text{cc}} = 11.6 \text{ A}$$

#### – Determinare

Tempo di raggiungimento della temperatura massima ammissibile ( $t_{12}$ ).

#### – Ipotesi

Cabinet sigillato e con pareti indeformabili, aria gas ideale, sviluppo volumetrico e capacità termica delle apparecchiature elettroniche trascurabili.

– Soluzione

Poiché le pareti del cabinet sono indeformabili, il volume interno non varia dopo la chiusura. Pertanto, se l'aria non trafile attraverso le guarnizioni, il cabinet è assimilabile ad un sistema chiuso e l'aria in esso contenuta subisce una trasformazione isocora.

Lo sviluppo volumetrico delle apparecchiature elettroniche alloggiate nel cabinet è trascurabile, perciò il volume interno occupato dall'aria si può stimare come segue:

$$V_1 \equiv V_2 \cong L_1 L_2 L_3 = 0.270 \text{ m}^3$$

La massa dell'aria può essere calcolata mediante l'equazione di stato dei gas ideali, in cui si introducono i valori iniziali (stato 1) delle proprietà termodinamiche e la costante di gas perfetto  $R = 287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  dell'aria (secca):

$$m = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{100000 \cdot 0.045}{287.0 \cdot 298} = 0.316 \text{ kg}$$

Data la variazione di temperatura relativamente limitata, per il calore specifico a volume costante dell'aria si può assumere un valore pari a circa  $720 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  costanti (valore medio nell'intervallo di variazione della temperatura). Si può così ricavare il calore assorbito dall'aria per portare la sua temperatura al valore massimo tollerabile dall'elettronica (stato 2) sulla base del primo principio della termodinamica (con lavoro nullo in quanto è nulla la variazione di volume):

$$\begin{aligned} Q_{12} = \Delta U_{12} = m \Delta u_{12} &= m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \cong m c_{v,\text{medio}} (T_2 - T_1) = \\ &= 0.316 \cdot 720 \cdot (353 - 298) = 12495 \text{ J} = 12.5 \text{ kJ} \end{aligned}$$

La potenza termica dissipata dalle apparecchiature elettroniche in condizioni di carico massimo può essere stimata come segue:

$$\dot{Q} = \Delta V_{cc} I_{cc} = 12 \cdot 11.6 = 139 \text{ W}$$

Assumendo che le pareti siano adiabatiche, l'unica sorgente con cui l'aria nel cabinet scambia calore è costituita dalle apparecchiature elettroniche. Pertanto, il tempo in cui si raggiungerebbe nel cabinet la temperatura massima ammissibile può essere stimato come segue:

$$t_{12} = Q_{12} / \dot{Q} = 89.8 \text{ s} \cong 1.5 \text{ min}$$

– Commenti

Le pareti non sono in realtà adiabatiche. Tuttavia, la potenza scambiata attraverso di esse per conduzione e convezione è limitata, per cui è quasi sempre opportuno ventilare l'interno del cabinet.

**C.IV. Trasformazione isoterma di gas ideale**

– Problema

Aria con stato iniziale caratterizzato da volume occupato 110 dm<sup>3</sup>, pressione 1.00 bar e temperatura 40°C subisce una compressione isoterma, al termine della quale il volume occupato si è ridotto a 11 dm<sup>3</sup>.

Determinare la massa, la densità iniziale e la pressione finale dell'aria. Inoltre, calcolare il lavoro e il calore scambiati durante la trasformazione.

– Dati

Sostanza: aria secca

$$V_1 = 110 \text{ dm}^3 = 0.110 \text{ m}^3$$

$$p_1 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \rightarrow 2) \text{ Trasformazione isoterma} \Rightarrow T_2 = T_1$$

$$T_1 \equiv T_2 = 40^\circ\text{C} = 313 \text{ K}$$

$$V_2 = 11 \text{ dm}^3 = 0.011 \text{ m}^3$$

$$c_p = 1.006 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 1006 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

– Determinare

Massa (m), densità iniziale ( $\rho_1$ ) e pressione finale ( $p_2$ ) dell'aria, lavoro ( $L_{12}$ ) e calore ( $Q_{12}$ ) scambiati durante la trasformazione.

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'aria secca si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

La massa si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0.122 \text{ kg}$$

La densità massica iniziale (stato 1) si ricava attraverso la sua definizione:

$$\rho_1 = m / V_1 = 1.113 \text{ kg} / \text{m}^3$$

La pressione finale (stato 2) si ricava anch'essa tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_2 = mRT_2 / V_2 = 1.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ bar}$$

Il lavoro complessivamente scambiato durante la trasformazione (isoterma) è pari a:

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left( \frac{mRT}{V} \right) dV = mRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -25328 \text{ J} = -25 \text{ kJ}$$

Il risultato numerico è negativo in quanto il lavoro è fornito al fluido (lavoro di compressione).

L'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla sua temperatura. Pertanto, essendo la trasformazione isoterma, l'energia interna della quantità di aria considerata non varia ( $\Delta U_{12}=0$ ). Dal primo principio si ottiene quindi che il calore scambiato vale:

$$Q_{12} = L_{12} = -25 \text{ kJ}$$

Il calore è negativo in quanto ceduto dal fluido. Per mantenere l'aria a temperatura costante, è quindi necessario raffreddarla.

– Commenti

Le condizioni di pressione e temperatura sono tali che l'aria può considerarsi un gas ideale durante tutta la trasformazione.

**C.V. Trasformazione isobara di gas ideale**

– Problema

Una quantità di aria, inizialmente contenuta in un volume di 24 L a pressione di 1 bar e a temperatura 300 K, subisce una trasformazione isobara, al termine della quale si viene a trovare a temperatura 800 K.

Determinare la massa dell'aria, assimilandola ad un gas ideale. Inoltre, calcolare il lavoro ed il calore scambiati durante la trasformazione, assumendo che il calore specifico a pressione costante dell'aria non vari significativamente con la temperatura e che il suo valore sia pari a 1.052 kJ/(kg·K).

– Dati

Sostanza: aria (secca)

$$V_1 = 24 \text{ L} = 0.024 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

1→2) Trasformazione isobara  $\Rightarrow p_2 = p_1$

$$p_1 \equiv p_2 = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 800 \text{ K}$$

$$c_p = 1.052 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 1052 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

– Determinare

Massa (m), lavoro ( $L_{12}$ ) e calore ( $Q_{12}$ ) scambiati.

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

Si può verificare agevolmente che i valori di temperatura e pressione dell'aria sono compatibili con l'ipotesi di gas ideale.

La costante di gas perfetto dell'aria si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

La massa dell'aria si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{100000 \cdot 0.024}{287.0 \cdot 300} = 0.0279 \text{ kg}$$

Per determinare il lavoro scambiato durante la trasformazione, occorre prima determinare il volume finale. Anche questo si ricava mediante l'equazione di stato:

$$V_2 = \frac{mRT_2}{p_2} = \frac{0.0279 \cdot 287.0 \cdot 800}{100000} = 0.064 \text{ m}^3$$

Il fluido subisce dunque un'espansione. Il lavoro scambiato durante la trasformazione (isobara) vale:

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 (V_2 - V_1) = 100000 \cdot (0.064 - 0.024) = 4000 \text{ J} = 4.0 \text{ kJ}$$

Il risultato è positivo, perciò il lavoro è ceduto dal fluido.

Per stimare il calore scambiato durante la trasformazione, va rammentato che il calore specifico a pressione costante è definito come segue:

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{p=\text{cost}}$$

Per un gas ideale, la cui entalpia (specifica e totale) dipende solo dalla temperatura e non dalla pressione, si desume che:

$$c_p = \frac{dh}{dT} \Rightarrow \Delta H_{12} = m\Delta h_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$$

Essendo costante per ipotesi il  $c_p$  dell'aria (tale approssimazione è in generale accettabile per variazioni ridotte di temperatura, se si utilizza il valore medio di  $c_p$  nell'intervallo di variazione), il calore complessivamente scambiato durante la trasformazione in esame si può valutare come segue:

$$\begin{aligned} Q_{12} = \Delta H_{12} &= m \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong mc_{p,\text{medio}} (T_2 - T_1) = \\ &= 0.0279 \cdot 1052 \cdot (800 - 300) = 14662 \text{ J} = 14.7 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Il risultato è positivo, per cui il calore è assorbito dal fluido.

– Commenti

Le condizioni di pressione e temperatura sono tali che l'aria può considerarsi un gas ideale durante tutta la trasformazione.

Per un sistema semplice, il primo principio può essere formulato in modi diversi:

$$dU = \delta Q - \delta L = \delta Q - p dV \Leftrightarrow dH = d(U + pV) = \delta Q + V dp$$

**C.VI. Trasformazione isobara di gas reale**

– Problema

Una quantità di vapore d'acqua surriscaldato, inizialmente a temperatura 1000°C e volume specifico 0.0196 m<sup>3</sup>/kg, subisce una trasformazione isobara, al termine della quale si trova a 505°C. Determinare la pressione iniziale e il volume specifico finale.

– Dati

Sostanza: acqua

$$T_1 = 1000^\circ\text{C} = 1273 \text{ K}$$

$$v_1 = 0.0196 \text{ m}^3/\text{kg}$$

1→2) Trasformazione isobara  $\Rightarrow p_2 = p_1$

$$T_2 = 505^\circ\text{C} = 778 \text{ K}$$

– Determinare

Pressione iniziale ( $p_1$ ), volume specifico finale ( $v_2$ ).

– Ipotesi

(Gas reale).

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'acqua si ricava da tabella:

$$R = 0.4615 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 461.5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

La pressione iniziale, coincidente con quella finale poiché la trasformazione è isobara, si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_1 \equiv p_2 = RT_1 / v_1 = 29.9 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 29.9 \text{ MPa}$$

Per verificare se si ha a che fare con un gas ideale, si devono verificare i valori di temperatura ridotta e pressione ridotta. A tal riguardo, si ricava da tabella che la temperatura e la pressione di punto critico dell'acqua sono pari a:

$$p_c = 22.09 \text{ MPa} = 22.09 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$T_c = 647.3 \text{ K}$$

La temperatura ridotta e la pressione ridotta nello stato iniziale sono pari a:

$$p_{r,1} = p_1 / p_c = 1.357$$

$$T_{r,1} = T_1 / T_c = 1.967$$

Tali valori sono con buona approssimazione compatibili con l'ipotesi di gas ideale ( $T \cong 2T_c$ ). Il valore stimato per la pressione iniziale può quindi ritenersi attendibile.

Al termine della trasformazione (isobara) si ha, invece:

$$p_{r,2} \equiv p_{r,1} = 1.357$$

$$T_{r,2} = T_2 / T_c = 1.202$$

Tali valori non sono compatibili con l'ipotesi di gas ideale. Occorre quindi, per determinare il volume specifico finale, determinare il fattore di compressibilità tramite gli appositi diagrammi. Se ne ricava:

$$Z_2 = Z_2(p_{r,2}, T_{r,2}) = 0.71$$

Il volume specifico finale si può ora determinare mediante l'equazione di stato dei gas reali:

$$v_2 = Z_2 RT_2 / p_2 = 0.00851 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

**C.VII. Trasformazione politropica di gas ideale**

– Problema

Una quantità di metano, inizialmente a pressione 1.00 bar e temperatura 27°C, subisce una trasformazione politropica con esponente della trasformazione 1.3, al termine della quale la pressione è stata innalzata a 2.50 bar.

Determinare il volume specifico iniziale, la temperatura finale e il lavoro specifico scambiato.

– Dati

Sostanza: metano

$$p_1 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$1 \rightarrow 2) \text{ Trasformazione politropica} \Rightarrow p_2 v_2^n = p_1 v_1^n$$

$$n = n_{1 \rightarrow 2} = 1.3$$

$$p_2 = 2.50 \text{ bar} = 2.50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

– Determinare

Volume specifico iniziale ( $v_1$ ) e temperatura finale ( $T_2$ ) del metano, lavoro specifico scambiato ( $l_{12}$ ).

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La pressione ridotta  $p_r = p/p_c$  si mantiene sempre  $\ll 1$ , tale quindi da poter considerare il gas perfetto. La costante di gas perfetto del metano si ricava da tabella:

$$R = 0.5182 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 518.2 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il volume specifico iniziale può essere determinato mediante l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$v_1 = RT_1 / p_1 = 1.555 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume specifico finale si calcola sfruttando l'equazione della politropica:

$$v_2 = v_1 (p_1/p_2)^{1/n} = 0.769 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

La temperatura al termine della trasformazione è calcolata mediante l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_2 = p_2 v_2 / R = 371 \text{ K} = 98^\circ\text{C}$$

Il lavoro specifico scambiato durante una trasformazione politropica di gas ideale può essere calcolato come segue:

$$l_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{v_1}^{v_2} p v^n \frac{dv}{v^n} = (p v^n)_{1,2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^n} = (p v^n)_{1,2} \frac{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}}{1-n} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n}$$

Nel caso in esame, si ottiene:

$$\ell_{12} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - n} = \frac{2.50 \cdot 10^5 - 1.00 \cdot 10^5}{1 - 1.3} = -122082 \text{ J} = -122 \text{ kJ/kg}$$

Il risultato è negativo, perciò il lavoro è fornito al fluido.

– Commenti

Il lavoro totale si calcola moltiplicando il lavoro specifico per la massa di fluido processata, oppure mediante la relazione:

$$L_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1 - n}$$

Un caso particolare di trasformazione politropica è la trasformazione adiabatica, in cui l'esponente  $n$  è pari al rapporto tra i calori specifici a pressione costante e volume costante del fluido processato.

**C.VIII. \* Ciclo chiuso di un gas ideale**

– Problema

Una quantità di aria subisce un processo ciclico che prevede, nell'ordine, una trasformazione isocora, una trasformazione isoterma e una trasformazione isobara. Inizialmente l'aria è caratterizzata da volume 0.500 L, pressione 1.00 bar e temperatura 27°C, mentre al termine della prima trasformazione la pressione sale a 7.00 bar.

Determinare la massa dell'aria e pressione, volume specifico e temperatura al termine di ogni trasformazione. Inoltre, rappresentare qualitativamente il ciclo su un diagramma p-v.

– Dati

1→2) Trasformazione isocora  $\Rightarrow v_2 = v_1$  ( $V_2 = V_1$ )

2→3) Trasformazione isoterma  $\Rightarrow T_3 = T_2$

3→1) Trasformazione isobara  $\Rightarrow p_1 = p_3$

$V_1 \equiv V_2 = 0.500 \text{ L} = 0.500 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$p_1 \equiv p_3 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$

$p_2 = 7.00 \text{ bar} = 7.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

– Determinare

$m, v_1, v_2, T_2, p_3, v_3, T_3.$

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'aria secca si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

L'equazione di gas perfetto restituisce il seguente valore del volume specifico iniziale:

$$v_1 = RT_1 / p_1 = 0.861 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

La massa d'aria processata vale pertanto:

$$m = V_1 / v_1 = 0.000580 \text{ kg} = 580 \text{ mg}$$

Per la temperatura alla fine della trasformazione isocora ( $v_2 = v_1$ ) si ha che:

$$T_2 = p_2 v_2 / R = 2101 \text{ K}$$

Lo stato al termine della seconda trasformazione è caratterizzato dal fatto che tale trasformazione è isoterma ( $T_3 = T_2$ ), mentre la trasformazione che riporta l'aria allo stato iniziale è isobara ( $p_3 = p_1$ ). Il volume specifico è infine dato dalla relazione:

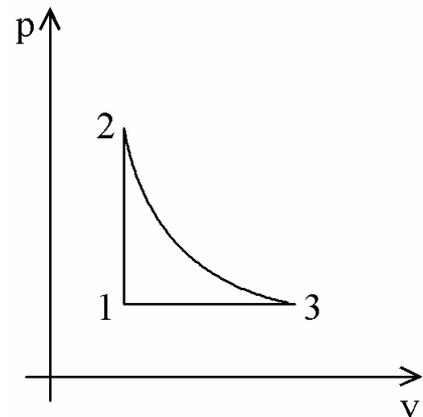
$$v_3 = RT_3 / p_3 = 6.03 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume finale è pari a:

$$V_3 = m v_3 = 0.0035 \text{ m}^3$$

I valori delle proprietà termodinamiche richieste sono raccolti nella tabella seguente:

Posizione	p (Pa)	v (m <sup>3</sup> /kg)	T (K)
1	1.00·10 <sup>5</sup>	0.861	300
2	7.00·10 <sup>5</sup>	0.861	2101
3	1.00·10 <sup>5</sup>	6.03	2101



La rappresentazione qualitativa del ciclo nel diagramma p-v è quella riportata accanto.

– Commenti

Note le trasformazioni e gli stati all'inizio e alla fine di queste, è possibile valutare il lavoro ed il calore scambiati nelle varie fasi del ciclo e, quindi, determinarne i rendimenti.

**C.IX. \* Ciclo chiuso di un gas ideale (2)**

– Problema

Una quantità di idrogeno (H<sub>2</sub>) subisce un processo ciclico che prevede, nell'ordine, una trasformazione politropica con esponente 1.1, una trasformazione adiabatca ed una trasformazione isobara. Inizialmente, l'idrogeno è caratterizzato da temperatura –35°C, mentre al termine della prima trasformazione la temperatura sale a –20°C e la densità è pari a 0.040 kg/m<sup>3</sup>.

Si determinino pressione, volume specifico e temperatura al termine di ogni trasformazione. Si rappresenti qualitativamente il ciclo su un diagramma p-v.

– Dati

1→2) Trasformazione politropica ⇒  $p_2 v_2^n = p_1 v_1^n$

$n \equiv n_{1 \rightarrow 2} = 1.1$

2→3) Trasformazione adiabatica

3→1) Trasformazione isobara  $\Rightarrow p_1 = p_3$

$$T_1 = -35^\circ\text{C} = 238 \text{ K}$$

$$T_2 = -20^\circ\text{C} = 253 \text{ K}$$

$$\rho_2 = 0.040 \text{ kg/m}^3$$

$$p_2 = 7.00 \text{ bar} = 7.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

– Determinare

$$p_1, v_1, p_2, v_2, p_3, v_3, T_3.$$

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'idrogeno si ricava da tabella:

$$R = 4.1240 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 4124.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il volume specifico al termine della prima trasformazione è pari a:

$$v_2 = 1/\rho_2 = 25.0 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Il volume specifico all'inizio della prima trasformazione si può stimare tenendo presente che la trasformazione è politropica. Si ha pertanto che:

$$v_1 = v_2 (T_2/T_1)^{1/(n-1)} = 46.05 \text{ m}^3/\text{kg}$$

La pressione all'inizio della prima trasformazione vale:

$$p_1 = RT_1/v_1 = 21328 \text{ Pa} = 21.3 \text{ kPa}$$

La pressione al termine della prima trasformazione vale:

$$p_2 = RT_2/v_2 = 41760 \text{ Pa} = 41.8 \text{ kPa}$$

Il volume specifico al termine della seconda trasformazione può essere ricavato considerando che tale trasformazione è adiabatica e, quindi, caratterizzata dalla relazione:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

in cui  $k$  è il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante dell'idrogeno. I valori di tali proprietà si ricavano da tabella e valgono, rispettivamente:

$$c_p = 14.307 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$c_v = 10.183 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il loro rapporto è pari a:

$$k = c_p/c_v = 1.405$$

Pertanto, si ottiene:

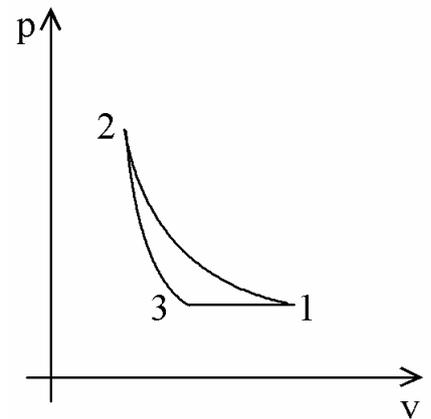
$$v_3 = v_2 (p_2/p_3)^{1/k} = 40.3 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Infine, si ha che:

$$T_3 = p_3 v_3 / R = 209 \text{ K}$$

I valori delle proprietà richieste sono raccolti nella tabella sottostante:

Posizione	p (kPa)	v (m <sup>3</sup> /kg)	T (K)
1	21.3	46.0	238
2	41.8	25.0	253
3	21.3	40.3	209



La rappresentazione qualitativa del ciclo nel diagramma p-v è quella riportata accanto.

### C.X. Calore specifico di un materiale solido

– Problema

Ai fini dell'applicazione di un trattamento termico, la temperatura di un manufatto con massa 3.4 kg deve essere portato dal valore ambiente, pari a 27°C, fino a 640°C. Il manufatto è realizzato in una lega metallica, il cui calore specifico è pari a 480 J/(kg·°C). Il processo di riscaldamento avviene in atmosfera. Stimare il calore da fornire al componente.

– Dati

$m_m = 3.4 \text{ kg}$   
 $c_m = 480 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$   
 $T_i = 27\text{°C}$   
 $T_f = 640\text{°C}$

– Determinare

Calore da fornire (Q).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura, trasformazione isobara.

– Soluzione

Il primo principio della termodinamica permette di formulare la seguente relazione:

$$\Delta H = Q + \int_{P_i}^{P_f} V dp$$

Non avendo alcuna indicazione in contrario, è lecito assumere costante la pressione atmosferica e, di conseguenza, considerare isobaro il processo di riscaldamento del manufatto in esame, che avviene in atmosfera. Pertanto, l'integrale a secondo membro nell'equazione precedente è nullo, e il calore da fornire al componente metallico vale:

$$Q = \Delta H = m_m \int_{T_i}^{T_f} c_m(T) dT \cong m c_{m,medio} (T_f - T_i) = 3.4 \cdot 480 \cdot (640 - 27) = 1.00 \cdot 10^6 \text{ J} = 1.00 \text{ MJ}$$

– Commenti

Il calore specifico a pressione costante dei materiali solidi è praticamente coincidente con quello a volume costante. Lo stesso vale per i liquidi.

Valutare una differenza di temperatura in celsius o in kelvin produce lo stesso risultato.

**C.XI. Calore specifico di solidi e liquidi**– Problema

Si consideri il manufatto in lega metallica di cui al problema precedente, caratterizzato da massa 3.4 kg e calore specifico 480 J/(kg·°C). Il trattamento termico a cui deve essere sottoposto prevede che, dopo essere stato portato alla temperatura di 640°C, venga immerso repentinamente in una vasca che contiene 220 L di un olio speciale, resistente alle alte temperature. Sapendo che la densità e il calore specifico dell'olio sono rispettivamente pari a 950 kg/m<sup>3</sup> e 2600 J/(kg·°C), e che la sua temperatura iniziale è uguale a quella ambiente, pari a 27°C, determinare la temperatura finale del bagno. Si trascurino la capacità termica delle pareti della vasca ed il calore scambiato attraverso di esse.

– ati

$$m_m = 3.4 \text{ kg}$$

$$c_m = 480 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$$

$$T_m = 640\text{°C}$$

$$V_o = 220 \text{ L} = 0.220 \text{ m}^3$$

$$\rho_o = 950 \text{ kg/m}^3$$

$$c_o = 2600 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$$

$$T_o = 27\text{°C}$$

– Determinare

Temperatura finale del bagno ( $T_f$ ).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura, trasformazione isobara, pareti della vasca adiabatiche e con capacità termica nulla.

– Soluzione

La massa di olio nella vasca è pari a:

$$m_o = \rho_o V_o = 209 \text{ kg}$$

Poiché la vasca è aperta all'atmosfera, le trasformazioni al suo interno sono isobare. Inoltre, non viene scambiata con l'esterno né materia, né energia. Ne consegue che l'entalpia finale del sistema manufatto-olio debba essere identica a quella iniziale:

$$\Delta H = Q + \int_{P_i}^{P_f} V dp = 0$$

Inoltre, l'entalpia acquisita dall'olio (in termini di calore sensibile durante il riscaldamento dalla temperatura iniziale  $T_o$  a quella finale  $T_f$ , incognita) deve essere in valore assoluto pari a quella ceduta dal manufatto (in termini di calore sensibile di raffreddamento dalla temperatura iniziale  $T_m$  a quella finale  $T_f$ , che per l'equilibrio termico è uguale a quella finale dell'olio). In termini matematici, si deve avere che:

$$\Delta H = \Delta H_o + \Delta H_m = 0 \Rightarrow \Delta H_o = -\Delta H_m$$

ovvero

$$m_o c_o (T_f - T_o) = -m_m c_m (T_f - T_m)$$

Risolviendo l'equazione rispetto all'unica incognita, la temperatura finale  $T_f$ , si ottiene:

$$T_f = \frac{m_o c_o T_o + m_m c_m T_m}{m_o c_o + m_m c_m} = 28.8^\circ\text{C}$$

– Commenti

In virtù della notevole quantità di olio impiegata, la temperatura finale del bagno rimane pressoché costante.

**C.XII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione**

– Problema

Tra le varie prove di omologazione che devono essere superate da un flight data recorder (FDR) per aeromobili, comunemente detto “scatola nera”, vi è la prova a fuoco. Questa prevede che i dispositivi in cui sono memorizzati i dati acquisiti durante il volo rimangano indenni dopo che l’FDR è stato sottoposto ad un flusso termico di  $10 \text{ kW/m}^2$  per un periodo di 30 minuti. Si tratta della prova più gravosa, che può essere superata solo annegando l’elettronica in una cera o altro materiale a cambiamento di fase, che assorba buona parte del calore fondendo a bassa temperatura e rimanendo chimicamente stabile fino a temperature elevate.

L’FDR in esame presenta sviluppo superficiale esterno pari a  $0.22 \text{ m}^2$  e temperatura di esercizio  $25^\circ\text{C}$ , ed impiega componenti elettroniche in grado di sostenere indenni temperature di  $120^\circ\text{C}$ . L’elettronica, la cui capacità termica è trascurata in favore di sicurezza, viene annegata in una cera che presenta calore specifico  $1.8 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$  in fase solida e  $2.5 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$  in fase liquida, temperatura di fusione  $105^\circ\text{C}$  e calore latente di fusione/solidificazione  $242 \text{ kJ/kg}$ . Determinare la massa minima di cera teoricamente necessaria a superare la prova a fuoco.

– Dati

$$q'' = 10 \text{ kW/m}^2 = 10000 \text{ W/m}^2$$

$$t_{if} = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}$$

$$A = 0.22 \text{ m}^2$$

$$T_i = 25^\circ\text{C}$$

$$T_f \equiv T_{\max} = 120^\circ\text{C}$$

$$c_s = 1.8 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C}) = 1800 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$c_l = 2.5 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C}) = 2500 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$T_{sl} = 105^{\circ}\text{C}$$

$$q_{sl} = 242 \text{ kJ/kg} = 242000 \text{ J/kg}$$

– Determinare

Massa della cera (m).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura.

– Soluzione

Il riscaldamento subito dalla cera avviene a pressione pressoché costante, dato che sono generalmente previste aperture di sfogo dei gas eventualmente liberati. Gli scambi di materia con l'esterno sono peraltro limitati all'espulsione delle fasi gassose e si possono quindi considerare trascurabili. Sulla base del primo principio della termodinamica si può quindi asserire che:

$$\Delta H = Q_{if}$$

ovvero, per unità di massa di cera,

$$\Delta h = Q_{if} / m = q_{if}$$

Assumendo che i calori specifici delle varie fasi della cera protettiva siano indipendenti dalla temperatura, il calore complessivamente assorbito dall'unità di massa di cera per portarsi dalla temperatura iniziale di  $25^{\circ}\text{C}$  (valore di esercizio) alla temperatura finale di  $120^{\circ}\text{C}$  (valore massimo ammissibile dall'elettronica) è pari a:

$$q_{if} = c_s (T_{sl} - T_i) + q_{sl} + c_l (T_f - T_{sl}) = 423'500 \text{ J/kg}$$

Assumendo poi che il flusso termico interessi tutta la superficie esterna del flight data recorder e che si mantenga costante per tutto il periodo temporale considerato (ciò va in realtà in favore di sicurezza poiché il flusso termico tende a diminuire con l'aumentare della temperatura superficiale esterna), l'energia complessivamente apportata durante la prova a fuoco vale:

$$Q_{if} \equiv q'' A t_{if} = 10'000 \cdot 0.22 \cdot 1800 = 3'960'000 \text{ J} = 3.96 \text{ MJ}$$

In definitiva, la minima massa di cera in cui annegare l'elettronica è pari a:

$$m = \frac{\Delta H}{\Delta h} = \frac{Q_{if}}{q_{if}} = \frac{3'960'000}{423'500} = 9.35 \text{ kg}$$

– Commenti

Si noti che la maggior parte del calore è assorbita dal processo di fusione della cera:

$$\frac{q_{sl}}{q_{if}} = \frac{242'000}{423'500} = 0.57 = 57\%$$

Inoltre, poiché il fronte di fusione si propaga dall'esterno verso l'interno, la temperatura dell'elettronica aumenterà al più fino alla temperatura di fusione della cera fintantoché quest'ultima non si sarà completamente liquefatta.

In corrispondenza degli spigoli si verificano flussi termici maggiori che altrove. Occorre perciò aumentare localmente lo spessore dello strato di cera protettiva, oppure, come è prassi nel settore, adottare geometrie che non prevedano spigoli (involucri cilindrici o sferici).

**C.XIII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione: bibita con ghiaccio**

– Problema

In un recipiente non sigillato che contiene 200 cl di una bibita a base acqua, inizialmente a temperatura ambiente pari a 30°C, vengono inseriti 21 g di ghiaccio a temperatura –12°C, che dopo un certo tempo si liquefa completamente. La densità iniziale della fase liquida è pari a 1 kg/dm<sup>3</sup>. Il calore specifico della bibita vale 2.04 kJ/(kg·°C) per la fase solida e 4.19 kJ/(kg·°C) per la fase liquida. La transizione solido-liquido ha luogo a 0°C ed il calore latente di liquefazione ad essa associato è pari a 334 kJ/kg. Trascurando la capacità termica della piccola massa di aria che è inevitabilmente presente nel recipiente ed assumendo che le pareti del recipiente siano termicamente isolate, determinare la temperatura finale di equilibrio della bibita.

– Dati

$$V_l = 200 \text{ cl} = 200 \text{ cm}^3 = 2.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$T_l = 30^\circ\text{C}$$

$$m_s = 21 \text{ g} = 0.021 \text{ kg}$$

$$T_s = -12^\circ\text{C}$$

$$\rho_b = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_s = 2.04 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)} = 2040 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$$

$$c_l = 4.19 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)} = 4190 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$$

$$q_{sl} = 334 \text{ kJ/kg} = 334 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$T_{sl} = 0^\circ\text{C}$$

– Determinare

Temperatura finale di equilibrio ( $T_f$ ).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura, pareti del recipiente adiabatiche, capacità termica dell'aria nel recipiente trascurabile.

– Soluzione

Poiché il recipiente è aperto all'atmosfera, le trasformazioni al suo interno sono isobare. Inoltre, non viene scambiata con l'esterno né materia, né energia. Pertanto, l'entalpia finale del sistema bibita-ghiaccio deve essere identica a quella iniziale:

$$\Delta H = Q + \int_{P_i}^{P_f} V dp = 0$$

Ne consegue che l'entalpia acquisita dal ghiaccio (in termini di calore sensibile durante il riscaldamento dalla temperatura iniziale  $T_s$  a quella di fusione  $T_{sl}$ , di calore latente di fusione durante la transizione di fase e, infine, di calore sensibile durante il riscaldamento dalla temperatura di fusione  $T_{sl}$  a quella finale  $T_f$ , incognita) deve essere in valore assoluto pari a quella ceduta dal liquido (calore sensibile di raffreddamento dalla temperatura iniziale  $T_l$  a quella finale  $T_f$ , che, in virtù dell'equilibrio termico, è uguale a quella finale del ghiaccio liquefatto). In termini matematici, si deve avere che:

$$\Delta H = \Delta H_s + \Delta H_1 = 0 \Rightarrow \Delta H_s = -\Delta H_1$$

ovvero

$$m_s [c_1 (T_f - T_{sl}) + q_{sl} + c_s (T_{sl} - T_s)] = -m_1 c_1 (T_f - T_1)$$

Risolvendo l'equazione rispetto all'unica incognita, la temperatura finale  $T_f$ , si ottiene:

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_s c_s T_s + m_s c_1 T_{sl} - m_s c_s T_{sl} - m_s q_{sl}}{m_1 c_1 + m_s c_1} = 19.0^\circ\text{C}$$

– Commenti

L'ipotesi di adiabaticità delle pareti è in realtà piuttosto forte, specie se il recipiente presenta pareti sottili in materiale plastico e non è chiuso superiormente da un coperchio. Il risultato è quindi da considerarsi accettabile solo in prima approssimazione.

Se si introducessero nel recipiente anche 5 g di zucchero, caratterizzato da calore specifico  $c_z = 1.3 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$  e temperatura iniziale uguale a quella della bibita ( $30^\circ\text{C}$ ), si otterrebbe che:

$$\Delta H = \Delta H_s + \Delta H_1 + \Delta H_z = 0 \Rightarrow \Delta H_s = -\Delta H_1 - \Delta H_z$$

ovvero

$$m_s [c_1 (T_f - T_{sl}) + q_{sl} + c_s (T_{sl} - T_s)] = -(m_1 c_1 + m_z c_z)(T_f - T_1)$$

Risolvendo l'equazione rispetto all'unica incognita, la temperatura finale  $T_f$ , si ottiene:

$$T_f = \frac{(m_1 c_1 + m_z c_z) T_1 + m_s c_s T_s + m_s c_1 T_{sl} - m_s c_s T_{sl} - m_s q_{sl}}{(m_1 c_1 + m_z c_z) + m_s c_1} = 19.1^\circ\text{C}$$

La variazione è pressoché trascurabile.

**ESERCIZI UNITA' D – SOMMARIO**

- D. SISTEMI APERTI E CICLI TERMODINAMICI**
- D.I. Cabinet per apparecchiature elettroniche**
- D.II. Server**
- D.III. Raffreddamento a liquido di un processore**
- D.IV. Compressione di un liquido**
- D.V. Compressione di un vapore surriscaldato**
- D.VI. Vaporizzazione isobara**
- D.VII. Condensazione isoterma di una miscela satura liquido-vapore**
- D.VIII. Espansione adiabatica reversibile**
- D.IX. Misura del titolo mediante laminazione adiabatica**
- D.X. Ciclo Rankine ideale senza surriscaldamento**
- D.XI. Ciclo Rankine ideale con surriscaldamento**
- D.XII. Ciclo frigorifero ideale a R134a**
- D.XIII. Pompa di calore a R134a**
- D.XIV. Miscelazione adiabatica di due correnti**
- D.XV. Miscelazione di tre correnti**

**D.I. Cabinet per apparecchiature elettroniche**– Problema

Si consideri un cabinet per apparecchiature elettroniche come quello di cui al problema C.II. Al suo interno sono alloggiati dispositivi alimentati in corrente continua che lavorano a tensione 12 V ed assorbono, in condizioni di carico massimo, una corrente pari a 11.6 A. All'esterno del cabinet si ha aria in condizioni ambiente tipiche (temperatura 25°C, pressione 1 bar).

Sapendo che la massima temperatura ammissibile dall'elettronica è pari a 80°C, determinare la minima portata di aria che un sistema di raffreddamento a circolazione forzata deve assicurare. Inoltre, sapendo che l'aria viene aspirata e scaricata attraverso aperture circolari con diametro 100 mm, determinare la velocità con cui l'aria fluisce attraverso le aperture.

– Dati

Sostanza: aria secca

$$p = 1 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_{\text{ambiente}} = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$$

$$T_{\text{max}} = 80^\circ\text{C} = 353 \text{ K}$$

$$\Delta V_{\text{cc}} = 12 \text{ V}$$

$$I_{\text{cc}} = 11.6 \text{ A}$$

$$D_1 = D_2 = 80 \text{ mm} = 0.080 \text{ m}$$

– Determinare

Portata dell'aria di raffreddamento, velocità dell'aria all'ingresso e all'uscita.

– Ipotesi

Aria gas ideale, sistema aperto, condizioni stazionarie.

– Soluzione

L'aria, aspirata alla temperatura ambiente di 25°C, subisce un progressivo riscaldamento mentre fluisce attraverso il cabinet e, quindi, raggiunge la sua massima temperatura in corrispondenza della sezione di efflusso, tramite la quale ritorna nell'ambiente esterno.

Alcuni dei dispositivi ospitati dal cabinet, particolarmente sensibili ai surriscaldamenti, non possono tollerare una temperatura superiore a 80°C, ma non sono disponibili informazioni sulla loro posizione. Si deve perciò assumere, in favore di sicurezza, che essi si trovino nelle immediate prossimità della sezione di efflusso, ove la temperatura dell'aria di raffreddamento che li lambisce è massima. Di conseguenza, la minima portata di raffreddamento sarà quella per la quale l'aria, aspirata ad una temperatura  $T_1$  pari al valore ambiente, viene espulsa ad una temperatura  $T_2$  pari al valore massimo ammissibile.

$$T_1 = T_{\text{ambiente}}$$

$$T_2 = T_{\text{max}}$$

Operando in favore di sicurezza, si può assumere nullo lo scambio termico per conduzione attraverso le pareti del cabinet. Pertanto, il sistema di raffreddamento ad aria forzata deve essere in grado di asportare interamente la potenza termica dissipata dai dispositivi elettronici, valutabile come:

$$\dot{Q}_{cc} = \Delta V_{cc} I_{cc} = 12 \cdot 11.6 = 139 \text{ W}$$

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. L'equazione di bilancio della massa permette di stabilire che, in condizioni stazionarie, la portata di aria che attraversa il sistema è costante:

$$\dot{m}_u - \dot{m}_e = 0 \Rightarrow \dot{m}_u = \dot{m}_e = \dot{m}$$

Per un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido, l'equazione di bilancio dell'energia assume la forma:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si trascurano gli scambi termici attraverso le pareti del cabinet. La potenza termica scambiata è quindi pari alla potenza termica dissipata dai dispositivi elettronici presenti.

$$\dot{Q} \equiv \dot{Q}_{cc} = 139 \text{ W}$$

Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile è anche il lavoro scambiato dai dispositivi di ventilazione (che è comunque facilmente valutabile sulla base della tensione e della corrente assorbite). L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

Per stimare la variazione di entalpia specifica, va rammentato che il calore specifico a pressione costante è definito come segue:

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{p=\text{cost}}$$

Il processo avviene a pressione costante. Peraltro, le condizioni sono tali che l'aria può essere considerata per tutto il processo un gas perfetto (la verifica sulla base delle pressioni e delle temperature ridotte è agevole), la cui entalpia (specifica e totale) dipende solo dalla temperatura. Se ne desume che:

$$c_p = \frac{dh}{dT} \Rightarrow h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$$

Qualora si possa assumere che, nell'intervallo di integrazione, esista una dipendenza lineare del calore specifico dalla temperatura (assunzione generalmente accettabile per intervalli di temperatura ridotti), si può assumere  $c_p$  costante ed assegnargli il valore alla temperatura media della trasformazione,  $T_{\text{media}}$ .

$$T_{\text{media}} = \frac{(T_1 + T_2)}{2} \cong \frac{25 + 80}{2} = 52.5^\circ\text{C} = 325.7 \text{ K}$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_{p,\text{medio}} \cdot (T_2 - T_1) \cong c_p(T_{\text{media}}) \cdot (T_2 - T_1)$$

Da tabella si ricava che il calore specifico a pressione costante dell'aria a temperatura  $T_A=300$  K vale

$$c_{p@T_A} = 1.005 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 1005 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

mentre a temperatura  $T_B=350$  K vale

$$c_{p@T_B} = 1.008 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 1008 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Da ciò si può stimare che:

$$c_{p,\text{medio}} \cong c_{p@T_A} + (c_{p@T_B} - c_{p@T_A}) \frac{T_{\text{media}} - T_A}{T_B - T_A} = 1006.5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

In definitiva, la minima portata in massa dell'aria deve essere tale che:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{(h_2 - h_1)} \cong \frac{\dot{Q}}{c_{p,\text{medio}}(T_2 - T_1)} = 0.00180 \text{ kg/s} = 1.80 \text{ g/s}$$

In un sistema a due correnti in condizioni stazionarie, la portata in massa è sempre costante. Lo stesso non può dirsi tuttavia per la portata in volume, che nel caso in esame dipende dalla densità dell'aria. Questa dipende a sua volta dalla temperatura e può essere valutata mediante l'equazione di stato dei gas ideali, in cui la costante di gas perfetto dell'aria (secca) è pari a 287.0 J/(kg·K). La densità dell'aria all'aspirazione è perciò pari a

$$\rho_1 = \frac{p}{RT_1} = \frac{100000}{287.0 \cdot 298} = 1.169 \text{ kg/m}^3$$

mentre all'uscita è pari a

$$\rho_2 = \frac{p}{RT_2} = \frac{100000}{287.0 \cdot 353} = 0.987 \text{ kg/m}^3$$

Le portate in volume all'ingresso e all'uscita valgono:

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1} = 0.00154 \text{ m}^3/\text{s} = 1.54 \text{ dm}^3/\text{s}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2} = 0.00182 \text{ m}^3/\text{s} = 1.82 \text{ dm}^3/\text{s}$$

Infine, la sezione di passaggio dell'aria all'ingresso, uguale alla sezione di passaggio all'uscita, è pari a:

$$S_1 \cong S_2 = \pi \frac{D_1^2}{4} = 0.00503 \text{ m}^2$$

Pertanto, le velocità dell'aria valgono, rispettivamente:

$$w_1 = \frac{\dot{V}_1}{S_1} = 0.31 \text{ m/s}$$

$$w_2 = \frac{\dot{V}_2}{S_2} = 0.36 \text{ m/s}$$

– Commenti

Nel caso siano presenti nel sistema dispositivi elettrici ed elettronici funzionanti a tensioni diverse, la potenza termica complessivamente fornita alla portata di aria che attraversa il sistema è data dalla somma delle potenze termiche dissipate dai singoli dispositivi, dalle dal prodotto delle relative tensioni e correnti:

$$\dot{Q}_{cc} = \sum \Delta V_{cc} I_{cc}$$

Nel dimensionamento del sistema di ventilazione occorre in realtà tenere conto anche delle resistenze alla trasmissione del calore tra i singoli dispositivi elettronici alloggiati nel cabinet e l'aria. In particolare, occorre far riferimento ai dispositivi più sensibili al surriscaldamento. La temperatura di ogni dispositivo può essere correlata alla potenza termica dissipata al suo interno e alla resistenza termica tra il dispositivo stesso e l'aria di ventilazione:

$$T_{disp} - T_{aria} = R_{disp-aria} \dot{Q}_{disp}$$

Conseguentemente, la temperatura massima dell'aria di ventilazione, che generalmente si ha in corrispondenza della sezione di efflusso e sulla cui base va valutata la portata minima di ventilazione, è pari a:

$$T_2 = T_{aria,max} = T_{disp,max} - R_{disp-aria} \dot{Q}_{disp,max}$$

Il calcolo delle resistenze alla trasmissione del calore sarà analizzato in dettaglio nel seguito.

La limitazione delle velocità di aspirazione e di efflusso è in generale richiesta per il contenimento del rumore.

## D.II. Server

### – Problema

Si consideri un server che in condizioni di massimo carico assorbe 700 W elettrici. Siano pari a 37°C la temperatura ambiente massima e a 1 bar la pressione ambiente tipica. La sezione di aspirazione dell'aria di ventilazione presenta area complessiva 250 cm<sup>2</sup>, mentre la sezione di efflusso presenta area 200 cm<sup>2</sup>. Al fine di contenere il rumore, si vuole limitare a 1.6 m/s la massima velocità dell'aria nel sistema. Determinare in tali condizioni la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel case del server.

### – Dati

Sostanza: aria secca

$$\dot{Q} = 700 \text{ W}$$

$$T_{ambiente} = T_1 = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$$

$$p = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$A_1 = 250 \text{ cm}^2 = 0.0250 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 200 \text{ cm}^2 = 0.0200 \text{ m}^2$$

$$w_{max} = 1.6 \text{ m/s}$$

### – Determinare

Massima temperatura dell'aria.

### – Ipotesi

Aria gas ideale, sistema aperto, condizioni stazionarie.

– *Soluzione*

Operando in favore di sicurezza, si può assumere nullo lo scambio termico per conduzione attraverso le pareti del case. Pertanto, il sistema di raffreddamento ad aria forzata deve essere in grado di asportare interamente la potenza termica sviluppata dai componenti del server.

L'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita è:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si trascurano gli scambi di calore attraverso le pareti del case. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e possono essere trascurate. Parimenti trascurabile è il lavoro fornito al fluido dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

Poiché il processo avviene a pressione costante, pari alla pressione atmosferica, si può anche scrivere:

$$h_2 - h_1 \cong c_{p,medio} (T_2 - T_1)$$

La massima velocità si ha sicuramente in efflusso, essendo ivi maggiore la temperatura dell'aria e, allo stesso tempo, più ridotta l'area della sezione di passaggio. La densità dell'aria in uscita non è tuttavia nota, essendo incognita la temperatura, così come non è noto il calore specifico medio (a pressione costante). Si può comunque procedere ad una stima e, successivamente, perfezionare il calcolo con una procedura di tipo iterativo.

Ipotizzando che la temperatura di uscita dell'aria sia pari a 57°C (330 K), una stima di primo tentativo della densità in uscita restituisce:

$$\rho'_2 = \frac{RT'_2}{p} = \frac{287.0 \cdot 350}{100000} = 0.948 \text{ kg/m}^3$$

Ciò permette di calcolare anche la portata in massa dell'aria:

$$\dot{m}' = \rho'_2 w_{\max} A_2 = 0.948 \cdot 1.6 \cdot 0.0200 = 0.0303 \text{ kg/s}$$

Per il calore specifico medio si può assumere un valore pari a 1006 J/(kg·K). Si ottiene così una nuova e più esatta stima della temperatura in uscita, che rappresenta anche la massima temperatura nel sistema.

$$T_2'' = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}' c_{p,medio}} = \frac{700}{0.0303 \cdot 1006} = 333 \text{ K} = 60^\circ\text{C}$$

Il valore ottenuto è prossimo a quello ipotizzato, per cui non è necessario iterare. Se comunque si desiderasse un risultato più accurato, o se le stime di primo tentativo, arbitrarie, fossero state molto diverse dai risultati ottenuti, sulla base della temperatura ultima calcolata si potrebbe stimare un nuovo valore per la densità e, quindi, per la portata in massa, da cui ricavare infine un nuovo valore per la temperatura in efflusso.

– *Commenti*

Se si abbassa la temperatura ambiente, si abbassano in eguale misura tutte le temperature nel sistema e, quindi, anche i rischi di surriscaldamento. A tal scopo, server e workstation vengono spesso tenuti in locali condizionati.

Dato che le massime temperature dell'aria si raggiungono in prossimità della sezione di efflusso, è opportuno posizionare lontano da questa i componenti che soffrono maggiormente i surriscaldamenti (processori, dischi rigidi, ecc.), ed in prossimità di questa i componenti meno delicati (alimentatore/trasformatore, ecc.).

### D.III. Raffreddamento a liquido di un processore

– Problema

Un processore ad elevate prestazioni assorbe, in condizioni di massimo carico, una potenza pari a 85 W elettrici. Si determini quale incremento di temperatura subirebbe una portata di acqua di raffreddamento pari a 1.5 L/min.

– Dati

Sostanza: acqua

$$\dot{Q} = 85 \text{ W}$$

$$\dot{V} = 1.5 \text{ L/min} = 0.025 \text{ dm}^3/\text{s} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

– Determinare

Incremento di temperatura dell'acqua.

– Ipotesi

Sistema aperto, condizioni stazionarie.

– Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita è:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale ed il lavoro di pompaggio del fluido (la pompa è comunque esterna al sistema aperto considerato), l'equazione di bilancio dell'energia assume la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1) = \rho \dot{V}(h_2 - h_1)$$

Per un liquido, la variazione di entalpia specifica a pressione costante si può stimare come segue:

$$h_2 - h_1 \cong c(T_2 - T_1)$$

La densità e il calore specifico dell'acqua in condizioni ambiente standard si possono assumere pari a 1000 kg/m<sup>3</sup> e 4186 J/(kg·K), rispettivamente. Pertanto, il massimo incremento della temperatura dell'acqua sarà:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{\rho \dot{V} c} = \frac{85}{1000 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 4186} = 0.81^\circ\text{C}$$

– Commenti

L'incremento di temperatura è assai ridotto. Inoltre, la resistenza alla trasmissione del calore tra un liquido e un solido è molto minore che tra un gas e un solido, il che fa sì che la temperatura del dispositivo raffreddato sia molto prossima a quella del liquido che lo lambisce:

$$T_{\text{disp}} = T_{\text{liquido}} + R_{\text{disp-liquido}} \dot{Q}_{\text{disp}} \approx T_{\text{liquido}}$$

Il raffreddamento a liquido è in generale più efficiente di quello ad aria, ma comporta significative complicazioni del sistema: si deve scongiurare il rischio di perdite di liquido, che avrebbero conseguenze deleterie; inoltre, vanno previsti uno scambiatore di calore esterno, per raffreddare l'acqua, ed una pompa per farla circolare.

**D.IV. Compressione di un liquido**

– Problema

Determinare il lavoro specifico e la potenza assorbiti da una pompa che comprime una portata di 1 kg/s di acqua a 25°C, portandone la pressione da 0.1 bar a 14 bar.

– Dati

Fluido di lavoro: acqua

$$\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$$

$$T = 25^\circ\text{C}$$

$$p_1 = 0.1 \text{ bar} = 10 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 14 \text{ bar} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

– Determinare

Lavoro specifico e potenza assorbite dalla pompa.

– Ipotesi

Liquido incomprimibile.

– Soluzione

Considerando incomprimibile il liquido, si assume che il suo volume non vari significativamente con la pressione e che dipenda invece (come l'energia interna) dalla sola temperatura.

L'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita è:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Operando in termini di quantità specifiche (per unità di massa del fluido di lavoro), la relazione precedente si può anche riscrivere come:

$$q - \ell = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

Nel caso in esame, si possono trascurare gli scambi di calore attraverso il corpo della pompa. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole, essendo minime le variazioni di velocità (la sezione di ingresso è generalmente uguale a quella di uscita) e di quota del fluido attraverso la pompa, e vengono quindi trascurate. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la forma semplificata:

$$-\ell = h_2 - h_1$$

Per determinare il lavoro specifico, è necessario valutare l'entalpia specifica del fluido di lavoro all'inizio e alla fine della compressione. In generale, l'entalpia di un liquido sottoraffreddato (ovvero compresso) può essere correlata all'entalpia del liquido saturo alla stessa temperatura mediante la relazione seguente:

$$h = h_{\ell @ T} + v_{\ell @ T} (p - p_{\text{sat} @ T})$$

Variazioni della temperatura del liquido si possono avere nella pompa per effetto delle dissipazioni viscosive, ma sono tipicamente trascurabili, così come sono trascurabili per i liquidi le variazioni di temperatura legate alle variazioni di pressione. Si ottiene così:

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= [h_{\ell @ T} + v_{\ell @ T} (p_2 - p_{\text{sat} @ T})] - [h_{\ell @ T} + v_{\ell @ T} (p_1 - p_{\text{sat} @ T})] \\ &\equiv v_{\ell @ T} (p_2 - p_1) \end{aligned}$$

Da tabella si ottiene che, a temperatura 25°C, il volume specifico dell'acqua in condizioni di saturazione (liquido saturo) vale:

$$v_{\ell @ T} = 0.001003 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Pertanto, il lavoro specifico assorbito dalla pompa vale:

$$-\ell = v_{\ell @ T} (p_2 - p_1) = 1394 \text{ J / kg}$$

Si rammenti che, nelle convenzioni termodinamiche, il lavoro è positivo quando è erogato verso l'esterno, ed è invece negativo quando, come in questo caso, è assorbito dal fluido. Supponendo la pompa ideale, la potenza da essa assorbita vale:

$$\dot{L} = \dot{m} |-\ell| = 1394 \text{ W}$$

– Commenti

Se la pompa non si può considerare ideale, se ne calcola, tipicamente per via sperimentale, un rendimento  $\eta$  (di secondo principio) La potenza effettivamente assorbita si valuta quindi tramite la relazione:

$$\dot{L} = \frac{\dot{L}_{\text{ideale}}}{\eta} = \dot{m} \frac{|-\ell|}{\eta}$$

Il rendimento è  $<1$  per definizione, pertanto la potenza assorbita è sempre maggiore di quella trasferita al fluido. La differenza va in attriti viscosi e produce un riscaldamento del fluido, generalmente trascurabile.

**D.V. Compressione di un vapore surriscaldato**

– Problema

Determinare il lavoro specifico e la potenza assorbita da un compressore che comprime adiabaticamente e reversibilmente una portata di 1.00 kg/s di acqua in condizioni iniziali di vapore saturo secco, portandone la pressione da 3.169 kPa a 14 bar.

– Dati

Fluido di lavoro: acqua

$$\dot{m} = 1.00 \text{ kg/s}$$

$$p_1 = 3.169 \text{ kPa} = 3169 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 14 \text{ bar} = 1.4 \text{ MPa} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

– Determinare

Lavoro specifico e potenza assorbite dalla pompa.

– Ipotesi

Compressione adiabatica e reversibile.

– Soluzione

Ragionando in termini di quantità specifiche (per unità di massa del fluido di lavoro), l'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita assume la forma:

$$q - \ell = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

Nel caso in esame sono nulli per ipotesi gli scambi di calore attraverso il corpo del compressore. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole e vengono quindi trascurate. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la forma semplificata:

$$- \ell = h_2 - h_1$$

All'inizio della compressione, l'acqua è allo stato di vapore saturo secco. L'entalpia iniziale può essere quindi ottenuta direttamente da tabella:

$$h_1 = h_{v @ 3.169 \text{ kPa}} \equiv h_{v @ 25^\circ\text{C}} = 2547.2 \text{ kJ/kg} = 2.5472 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Per conoscere il valore dell'entalpia specifica alla fine della compressione occorre conoscere il valore di due proprietà termodinamiche intensive, una delle quali è evidentemente la pressione. La seconda proprietà termodinamica intensiva è l'entropia specifica, che si mantiene costante durante la compressione. Infatti, l'equazione di bilancio dell'entropia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita assume la forma:

$$\dot{S}_{\text{gen}} = \dot{m}(s_2 - s_1) - \sum \frac{\dot{Q}}{T}$$

Se il fluido subisce un processo adiabatico, sono nulli gli scambi termici con l'esterno. Se inoltre il processo è reversibile, è nullo anche il termine relativo alla generazione di entropia per irreversibilità interne. Semplificando di conseguenza la relazione precedente, si desume che una compressione adiabatica e reversibile è anche isoentropica:

$$s_2 = s_1$$

L'entropia specifica iniziale, coincidente con quella finale, può essere ricavata direttamente da tabella:

$$s_1 \equiv s_2 = s_{v @ 3.169 \text{ kPa}} \equiv s_{v @ 25^\circ\text{C}} = 8.5580 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 8558.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Da tabella si ottiene poi che, a pressione  $p_2=1.4 \text{ MPa}$  ed entropia specifica  $8555.6 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , valore vicino abbastanza a quello precedentemente determinato da rendere inutile un'interpolazione lineare, la temperatura  $T_2$  del vapore d'acqua surriscaldato al termine della compressione è pari a  $900^\circ\text{C}$ . Di conseguenza, l'entalpia specifica al termine della compressione vale:

$$h_2 = h_{@1.4 \text{ MPa} \& 900^\circ\text{C}} = 4391.5 \text{ kJ}/\text{kg} = 4.3915 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg}$$

In conclusione, il lavoro specifico assorbito dal compressore vale:

$$-\ell = h_2 - h_1 = 1.8443 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg} = 1.84 \text{ MJ}/\text{kg}$$

La potenza assorbita vale:

$$\dot{L} = \dot{m} \cdot |-\ell| = 1.84 \cdot 10^6 \text{ W} = 1.84 \text{ MW}$$

– Commenti

Le pompe servono ad incrementare la pressione di un liquido, i compressori ad incrementare la pressione di un gas.

A parità di salto di pressione, il lavoro necessario per comprimere un gas è notevolmente maggiore di quello richiesto per comprimere un liquido.

**D.VI. Vaporizzazione isobara**

– Problema

Determinare la potenza termica da fornire in caldaia ad una portata di  $150 \text{ kg}/\text{min}$  di acqua, inizialmente in condizioni di liquido sotto-raffreddato con temperatura  $25^\circ\text{C}$ , per vaporizzarla completamente e, quindi, surriscaldarla fino ad una temperatura pari a  $900^\circ\text{C}$ . Si assuma che durante tutto il processo la pressione si mantenga costantemente pari a  $14 \text{ bar}$ .

– Dati

Fluido di lavoro: acqua

$$\dot{m} = 150 \text{ kg}/\text{min} = 2.5 \text{ kg}/\text{s}$$

$$T_1 = 25^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 900^\circ\text{C}$$

$$p_1 = p_2 = 14 \text{ bar} = 1.4 \text{ MPa}$$

– Determinare

Potenza termica fornita all'acqua.

– Ipotesi

Processo isobaro.

– *Soluzione*

L'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita ha la forma:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, non hanno luogo interazioni con il fluido di tipo lavoro ed il termine relativo è quindi nullo. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole e vengono trascurate.

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

In generale, si ha che per un liquido sotto-raffreddato:

$$h = h_{\ell @ T} + v_{\ell @ T} (p - p_{\text{sat} @ T})$$

Da tabella si ricava che l'entalpia specifica ed il volume specifico del liquido saturo alla temperatura iniziale sono rispettivamente pari a:

$$h_{\ell,1} = h_{\ell @ 25^\circ\text{C}} = 104.89 \text{ kJ/kg} = 104.89 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$v_{\ell,1} = v_{\ell @ 25^\circ\text{C}} = 0.001003 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Inoltre, la pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura iniziale è pari a:

$$p_{\text{sat},1} = p_{\text{sat} @ 25^\circ\text{C}} = 3.169 \text{ kPa} = 3169 \text{ Pa}$$

L'entalpia iniziale vale quindi:

$$h_1 = h_{\ell,1} + v_{\ell,1} (p_1 - p_{\text{sat},1}) = 118.93 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Alla pressione del processo e alla temperatura finale si ottiene, dalle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato, il seguente valore di entalpia specifica:

$$h_2 = h_{@ 1.4 \text{ MPa} \& 900^\circ\text{C}} = 4391.5 \text{ kJ/kg} = 4.3915 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Il calore fornito all'acqua per unità di massa del fluido fluente è pari a:

$$q = h_2 - h_1 = 4.2726 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Infine, la potenza termica da fornire in caldaia all'acqua è pari a:

$$\dot{Q} = \dot{m}q = 10.7 \cdot 10^6 \text{ W} = 10.7 \text{ MW}$$

– *Commenti*

I processi in caldaia sono attuati mediante valvole, controllando le pressioni piuttosto che le temperature.

**D.VII. Condensazione isoterma di una miscela saturo liquido-vapore**

– *Problema*

Si deve condensare una portata pari a 18 kg/hr di una miscela saturo liquido-vapore (ovvero di vapore saturo umido) a titolo iniziale pari al 98%, in modo che il titolo finale sia non superiore al 5%. Il processo deve avvenire a temperatura costantemente pari a 50°C.

Determinare la potenza termica che si deve sottrarre all'acqua durante la condensazione.

– Dati

Fluido di lavoro: acqua

$$\dot{m} = 18 \text{ kg/hr} = 0.005 \text{ kg/s}$$

$$x_1 = 98\% = 0.98$$

$$x_2 \leq 5\% = 0.05$$

$$T_1 = T_2 = 50^\circ\text{C}$$

– Determinare

Potenza termica di condensazione.

– Ipotesi

Processo isoterma.

– Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario a un ingresso e una uscita ha la forma:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, non hanno luogo interazioni con il fluido di tipo lavoro ed il termine relativo è quindi nullo. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole e vengono trascurate.

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

L'entalpia specifica di un vapore saturo si valuta, in funzione delle entalpie del liquido saturo e del vapore saturo secco, mediante la seguente relazione:

$$h = h_\ell + x(h_v - h_\ell)$$

Da tabella si ricava che, alla temperatura a cui avviene il processo di condensazione, l'entalpia specifica del liquido saturo e l'entalpia specifica del vapore saturo secco valgono, rispettivamente:

$$h_\ell = h_{\ell@50^\circ\text{C}} = 209.33 \text{ kJ/kg} = 209.33 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$h_v = h_{v@50^\circ\text{C}} = 2592.1 \text{ kJ/kg} = 2592.1 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Pertanto, le entalpie specifiche iniziale e finale del vapore d'acqua sono pari a:

$$h_1 = h_\ell + x_1(h_v - h_\ell) = 2544 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$h_2 = h_\ell + x_2(h_v - h_\ell) = 328.5 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Il calore da sottrarre all'unità di massa di vapore d'acqua è pari a:

$$q = h_2 - h_1 = -2.22 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = -2.22 \text{ MJ/kg}$$

Infine, la potenza termica di condensazione è in valore assoluto pari a:

$$\dot{Q} = \dot{m}|q| = 11.1 \cdot 10^3 \text{ W} = 11.1 \text{ kW}$$

– Commenti

Nelle convenzioni termodinamiche il calore è positivo se assorbito, negativo se ceduto.

**D.VIII. Espansione adiabatica reversibile**

– Problema

Determinare il lavoro specifico e la potenza meccanica ottenibili attraverso l'espansione adiabatica e reversibile in turbina di una portata di 100 g/s di vapore d'acqua surriscaldato, che parte da una pressione iniziale pari a 14.0 bar e, al termine dell'espansione, si viene a trovare a pressione 1.00 atm ed in condizioni di vapore saturo con titolo 96.4%.

– Dati

Fluido di lavoro: acqua

$$\dot{m} = 100 \text{ kg/s} = 0.100 \text{ kg/s}$$

$$p_1 = 14.0 \text{ bar} = 1.40 \text{ MPa} = 1.40 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 1.00 \text{ atm} = 101.3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$x_2 = 96.4\% = 0.964$$

– Determinare

Lavoro specifico e potenza.

– Ipotesi

Espansione adiabatica reversibile.

– Soluzione

Ragionando in termini di quantità specifiche (per unità di massa del fluido di lavoro), l'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso ed una uscita assume la forma:

$$q - \ell = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

Nel caso in esame, si trascurano per ipotesi gli scambi di calore attraverso il corpo della turbina. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole e vengono trascurate. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la forma semplificata:

$$-\ell = h_2 - h_1$$

Alla fine dell'espansione, l'acqua è allo stato di vapore saturo umido, stato in cui l'entalpia specifica si valuta a partire dalle entalpie del liquido saturo e del vapore saturo secco mediante la seguente relazione:

$$h = h_\ell + x(h_v - h_\ell)$$

Da tabella si ricava che, alla pressione finale a cui si giunge attraverso il processo di espansione, l'entalpia specifica del liquido saturo e l'entalpia specifica del vapore saturo secco valgono, rispettivamente:

$$h_\ell = h_{\ell @ 1 \text{ atm}} = 419.04 \text{ kJ/kg} = 419.04 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$h_v = h_{v @ 1 \text{ atm}} = 2676.1 \text{ kJ/kg} = 2676.1 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Pertanto, l'entalpia specifica finale del vapore d'acqua è pari a:

$$h_2 = h_\ell + x_2(h_v - h_\ell) = 2594.8 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Per conoscere il valore dell'entalpia specifica all'inizio dell'espansione occorre conoscere il valore di due proprietà termodinamiche intensive, una delle quali è evidentemente la pressione. La seconda proprietà termodinamica intensiva è l'entropia specifica, che si mantiene costante durante tutta il processo di espansione. Infatti, l'equazione di bilancio dell'entropia per un flusso stazionario ad un ingresso e una uscita assume la forma:

$$\dot{S}_{\text{gen}} = \dot{m}(s_2 - s_1) - \sum \frac{\dot{Q}}{T}$$

Se il fluido subisce un processo adiabatico, sono nulli gli scambi termici con l'esterno; se inoltre il processo è reversibile, è nullo anche il termine relativo alla generazione di entropia per irreversibilità interne. Semplificando di conseguenza la relazione precedente, si desume che un'espansione adiabatica e reversibile è anche isoentropica:

$$s_2 = s_1$$

L'entropia specifica iniziale si valuta, in funzione delle entropie del liquido saturo e del vapore saturo secco, mediante la seguente relazione:

$$s = s_\ell + x(s_v - s_\ell)$$

Da tabella si ricava che, alla pressione finale a cui si giunge attraverso il processo di espansione, l'entropia specifica del liquido saturo e l'entropia specifica del vapore saturo secco valgono, rispettivamente:

$$s_\ell = s_{\ell @ 1 \text{ atm}} = 1306.9 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

$$s_v = s_{v @ 1 \text{ atm}} = 7354.9 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

Pertanto, l'entropia specifica finale, coincidente con quella iniziale, è pari a:

$$s_2 = s_1 = s_\ell + x_2(s_v - s_\ell) = 7137.2 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

Da tabella si ottiene che, a pressione 1.4 MPa ed entropia 7136.0 J/(kg·K) (valore questo prossimo a sufficienza a quello precedentemente determinato da rendere inutile un'interpolazione lineare), la temperatura del vapore d'acqua surriscaldato è pari a 350°C e, quindi, che l'entalpia specifica all'inizio dell'espansione vale:

$$h_1 = h_{@ 1.4 \text{ MPa} \& 350^\circ \text{C}} = 3149.5 \text{ kJ/kg} = 3.1495 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

In conclusione, il lavoro specifico erogato è:

$$-\ell = h_2 - h_1 = -0.555 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = 555 \text{ kJ/kg}$$

La potenza erogata dalla turbina vale:

$$\dot{L} = \dot{m} |-\ell| = 55.5 \cdot 10^3 \text{ W} = 55.5 \text{ kW}$$

## D.IX. Misura del titolo mediante laminazione adiabatica

### – Problema

Stimare il titolo di una miscela saturo liquido-vapor d'acqua a temperatura 195°C sapendo che, dopo essere stato sottoposta ad un processo di laminazione adiabatica, l'acqua viene a trovarsi nello stato di vapore surriscaldato a temperatura 120°C e pressione 1 bar.

– Dati

Fluido di lavoro: acqua

$$T_1 = 195^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 120^\circ\text{C}$$

$$p_2 = 1 \text{ bar} = 0.1 \text{ MPa}$$

– Determinare

Titolo.

– Ipotesi

Laminazione adiabatica.

– Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia per un flusso stazionario ad un ingresso e una uscita è:

$$q - \ell = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

Nel caso in esame si trascurano per ipotesi gli scambi di calore, essendo la laminazione sufficientemente rapida da poterla considerare adiabatica, mentre non si verificano interazioni di tipo lavoro e, di conseguenza, il termine relativo è nullo. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono verosimilmente piccole e vengono trascurate. Se ne ricava che l'entalpia specifica alla fine di un processo di laminazione adiabatica è uguale all'entalpia specifica iniziale:

$$h_2 = h_1$$

L'entalpia specifica finale può essere ricavata dalle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato. Alla pressione finale data (0.1 MPa) si ha che:

$$T_A = 100^\circ\text{C}$$

$$h_{2,A} = h_{@p_2 \& T_A} = 2676.2 \text{ kJ/kg}$$

$$T_B = 150^\circ\text{C}$$

$$h_{2,B} = h_{@p_2 \& T_B} = 2776.4 \text{ kJ/kg}$$

Per interpolazione lineare dei dati precedenti si ottiene che, alla temperatura finale data (120°C), l'entalpia specifica vale:

$$h_2 = h_{@p_2 \& T_2} = h_{2,A} + (h_{2,B} - h_{2,A}) \cdot \frac{T - T_A}{T_B - T_A} = 2716.3 \text{ kJ/kg}$$

D'altra parte, l'entalpia specifica iniziale del vapore saturo, coincidente con quella finale del vapore surriscaldato, è legata al titolo iniziale attraverso la relazione seguente:

$$h_1 = h_2 = h_{1,\ell} + x_1 (h_{1,v} - h_{1,\ell})$$

Le entalpie specifiche del liquido saturo e del vapore saturo secco alla temperatura iniziale si ricavano da tabella:

$$h_{1,\ell} = h_{\ell @ T_1} = 829.98 \text{ kJ/kg}$$

$$h_{1,v} = h_{v @ T_1} = 2790.0 \text{ kJ/kg}$$

In conclusione, il titolo del vapore saturo da caratterizzare vale:

$$x_1 = \frac{h_1 - h_{1,\ell}}{h_{1,v} - h_{1,\ell}} = 0.962 = 96.2\%$$

– Commenti

In una laminazione adiabatica, l'entalpia iniziale è uguale a quella finale. Questo non implica però che l'entalpia si mantenga costante durante tutta la trasformazione

Nei processi termodinamici, i parametri più facilmente misurabili sono la temperatura e la pressione. Tuttavia, la conoscenza anche simultanea di tali quantità è di per sé insufficiente per caratterizzare completamente una miscela satura liquido-vapore. Per valutare il titolo di un vapore saturo è infatti necessaria la conoscenza di un'altra proprietà termodinamica intensiva come il volume specifico, l'energia interna specifica, l'entalpia specifica o l'entropia specifica. Tali proprietà sono però difficili da misurare se si ha a che fare con un processo ciclico, in cui si ha una portata più o meno continua di fluido. Per determinare il titolo si può allora ricorrere al metodo sopra illustrato, che è messo in pratica spillando una piccola quantità della miscela satura liquido-vapore e sottoponendola ad un processo di laminazione adiabatica. Tale metodo presenta implementazione relativamente semplice e, soprattutto, richiede semplici misure di pressione e di temperatura.

Il vapore surriscaldato che risulta dalla laminazione adiabatica presenta la stessa entalpia della miscela satura iniziale. Si potrebbe quindi pensare di ricavarne energia meccanica attraverso un processo di espansione come quello descritto nel problema D.VIII. Ciò non è in realtà vero, poiché, durante la laminazione, l'energia dell'acqua ha subito una degradazione irreversibile. La conferma è data dall'incremento che l'entropia dell'acqua ha subito, data dalla differenza tra entropia finale ed entropia iniziale.

L'entropia iniziale della miscela satura liquido-vapore si può valutare come segue:

$$s_{1,\ell} = s_{\ell @ T_1} = 2.2835 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$s_{1,v} = s_{v @ T_1} = 6.4698 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$s_1 = s_{1,\ell} + x_1 (s_{1,v} - s_{1,\ell}) = 6.3123 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

L'entropia specifica finale può essere ricavata dalle tabelle delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato. Alla pressione finale data (0.1 MPa) si ha che:

$$T_A = 100^\circ\text{C}$$

$$s_{2,A} = s_{@ p_2 \& T_A} = 7.3614 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$T_B = 150^\circ\text{C}$$

$$s_{2,B} = s_{@ p_2 \& T_B} = 7.6134 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Per interpolazione lineare dei dati precedenti si ottiene che, alla temperatura finale data (120°C), l'entropia specifica vale:

$$s_2 = s_{@ p_2 \& T_2} = s_{2,A} + (s_{2,B} - s_{2,A}) \cdot \frac{T - T_A}{T_B - T_A} = 7.2606 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Si verifica che l'entropia è aumentata durante la laminazione adiabatica ( $s_2 > s_1$ ). A ciò corrisponde una generazione di entropia per irreversibilità interne, valutabile applicando al processo di laminazione adiabatica l'equazione di bilancio antropico per un sistema aperto ad una corrente in ingresso ed una corrente in uscita, operante in condizioni stazionarie:

$$\dot{S}_{\text{gen}} = \dot{m}(s_2 - s_1) - \sum \frac{\dot{Q}}{T}$$

Poiché la laminazione è adiabatica, l'ultimo termine a secondo membro è nullo. In definitiva, l'entropia generata per unità di massa di fluido a causa di irreversibilità interne al processo vale:

$$s_{\text{gen}} = \frac{\dot{S}_{\text{gen}}}{\dot{m}} = s_2 - s_1 = 0.9483 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

### D.X. Ciclo Rankine ideale senza surriscaldamento

– Problema

Si consideri una locomotiva a vapore, il cui motore implementa un ciclo di Rankine ideale, senza surriscaldamento, ed impiega acqua come fluido di lavoro. La pressione in caldaia è pari a 3 bar, mentre la pressione di condensazione è pari a 1.0133 bar. La portata di acqua nel sistema è pari a 12 kg/min. Determinare:

- il titolo al termine dell'espansione adiabatica reversibile
- la potenza netta erogata
- la potenza termica assorbita durante il passaggio in caldaia
- il rendimento di primo principio del ciclo

Risolvere il problema analiticamente e rappresentare graficamente il processo, indicando inoltre le ipotesi di lavoro formulate.

– Dati

fluido di lavoro: acqua

$$p_{\text{caldaia}} = 3 \text{ bar} = 0.3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$p_{\text{condensatore}} = 1.0133 \text{ bar} = 0.10133 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\dot{m} = 12 \text{ kg/min} = 0.20 \text{ kg/s}$$

– Determinare

Vedi testo.

– Ipotesi

Ciclo ideale  $\Rightarrow$  processi internamente reversibili.

Singoli componenti  $\Rightarrow$  sistemi aperti in condizioni stazionarie.

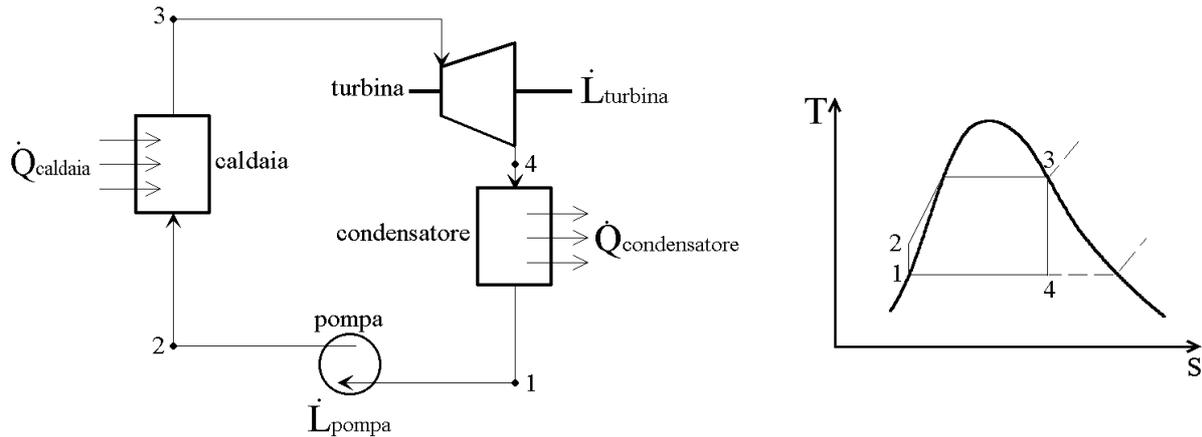
Variazioni di energia cinetica e potenziale trascurabili.

Pompa e turbina adiabatiche.

Nella pompa entra liquido saturo, nella turbina vapore saturo secco.

– Soluzione

L'architettura del sistema ed il ciclo a cui viene sottoposto il fluido di lavoro sono rappresentati di seguito.



Per risolvere il problema, è necessario individuare gli stati del fluido di lavoro all'inizio e alla fine di ogni trasformazione, vale a dire all'ingresso e all'uscita di ogni componente, e quindi determinare i corrispondenti valori dell'entalpia specifica. Infatti, schematizzando i singoli componenti del ciclo come sistemi aperti a due correnti in condizioni stazionarie, in cui si trascurano le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio dell'energia assume per tutti la forma:

$$\dot{m}\Delta h = \dot{Q} - \dot{L}$$

ovvero

$$\Delta h = q - \ell$$

Lo stato in 1 è per ipotesi quello di liquido saturo. La temperatura di saturazione e le proprietà di interesse del fluido si possono ricavare dalla tabella in pressione delle proprietà dell'acqua satura.

$$p_1 = p_{\text{condensatore}} = 0.10133 \cdot 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \begin{aligned} T_1 &= T_{\text{sat}@p_1} = 100.00^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K} \\ h_1 &= h_{\ell}@p_1 = 419.04 \text{ kJ/kg} = 0.41904 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

La pompa comprime il liquido adiabaticamente e reversibilmente, per cui sono da considerarsi nulli gli scambi termici con l'esterno e le dissipazioni viscosse. La variazione di temperatura dell'acqua è quindi legata alla sola variazione di pressione ed è tipicamente trascurabile (nel diagramma T-s è amplificata notevolmente per ragioni di chiarezza). Il liquido sottoraffreddato in 2 si trova così ad una temperatura praticamente coincidente con quella del liquido saturo in 1, per cui le sue proprietà possono essere stimate come segue:

$$\begin{aligned} p_2 = p_{\text{caldaia}} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa} &\Rightarrow v_2 \cong v_1 = v_{\ell}@T_1 = 1.044 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg} \\ T_2 \cong T_1 = 373.15 \text{ K} &\Rightarrow h_2 = h_1 + v_1(p_2 - p_1) = 0.41925 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

Lo stato 3 è per ipotesi quello di vapore saturo secco. Pertanto, si possono ricavare dalla tabella in pressione dell'acqua satura la temperatura di saturazione e le proprietà del vapore.

$$p_3 = p_{\text{caldaia}} = 0.3 \cdot 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \begin{aligned} T_3 &= T_{\text{sat}@p_3} = 133.55^\circ\text{C} = 406.70 \text{ K} \\ h_3 &= h_{\text{v}@p_3} = 2725.3 \text{ kJ/kg} = 2.7253 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

In 4 si ha una miscela saturo di liquido e vapore d'acqua, di cui non sono noti a priori il titolo e, di conseguenza, l'entalpia specifica. Considerando però che nella turbina, che è un sistema aperto a due correnti operante in condizioni stazionarie, si realizza un'espansione adiabatica e reversibile, si ricava dall'equazione di bilancio entropico dei sistemi aperti (cfr. D.VIII):

$$s_4 = s_3 = s_{\text{v}@p_3} = 6.9919 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Ma all'entropia della miscela saturo liquido-vapore in 4 si applica anche la relazione:

$$s_4 = s_{\ell @ T_4} + x_4 (s_{v @ T_4} - s_{\ell @ T_4})$$

in cui i valori dell'entropia specifica del liquido saturo e del vapore saturo secco possono essere ricavati dalla tabella in temperatura delle proprietà dell'acqua satura:

$$s_{\ell @ 100^\circ\text{C}} = 1.3069 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$s_{v @ 100^\circ\text{C}} = 7.3549 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Da ciò si ricava che il titolo al termine dell'espansione vale:

$$x_4 = \frac{s_4 - s_{\ell @ T_4}}{s_{v @ T_4} - s_{\ell @ T_4}} = \frac{6.9919 - 1.3069}{7.3549 - 1.3069} = 0.94 = 94\%$$

Anche i valori dell'entalpia specifica del liquido saturo e del vapore saturo secco possono essere ricavati dalla tabella in temperatura delle proprietà dell'acqua satura:

$$h_{\ell @ 100^\circ\text{C}} = 419.04 \text{ kJ/kg} = 0.41904 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$h_{v @ 100^\circ\text{C}} = 2676.1 \text{ kJ/kg} = 2.6761 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

In definitiva, l'entalpia specifica della miscela saturo in 4 vale:

$$h_4 = h_{\ell @ T_4} + x_4 (h_{v @ T_4} - h_{\ell @ T_4}) = 2.5406 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Applicando alla turbina, che opera adiabaticamente, l'equazione di bilancio di sistema aperto, si ottiene:

$$\dot{L}_{\text{turbina}} = -\dot{m}(h_4 - h_3) \equiv \dot{m}(h_3 - h_4) = 36934 \text{ W} = 37 \text{ kW}$$

Il valore ottenuto è positivo in quanto la potenza è erogata verso l'esterno del sistema.

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto alla pompa, che pure opera adiabaticamente, si ottiene:

$$|\dot{L}_{\text{pompa}}| = |-\dot{m}(h_2 - h_1)| \equiv \dot{m}(h_2 - h_1) = 41 \text{ W}$$

Senza l'operazione di valore assoluto, la potenza meccanica scambiata nella pompa risulterebbe negativa in quanto assorbita dal fluido.

La potenza meccanica netta erogata dal ciclo vale quindi:

$$\dot{L}_{\text{turbina}} - |\dot{L}_{\text{pompa}}| = 36893 \text{ W} = 37 \text{ kW}$$

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto alla caldaia, in cui non sono presenti dispositivi che scambiano lavoro meccanico col fluido, si ottiene:

$$\dot{Q}_{\text{caldaia}} = \dot{m}(h_3 - h_2) = 461211 \text{ W} = 461 \text{ kW}$$

Il valore ottenuto è positivo in quanto la potenza è assorbita dal fluido. Applicando la medesima equazione di bilancio al condensatore, si ottiene:

$$|\dot{Q}_{\text{condensatore}}| = |\dot{m}(h_1 - h_4)| \equiv \dot{m}(h_4 - h_1) = 424318 \text{ W} = 424 \text{ kW}$$

Senza l'operazione di valore assoluto, la potenza termica scambiata nel condensatore risulterebbe negativa in quanto ceduta dal fluido.

Infine, il rendimento di primo principio del ciclo, dato dal rapporto tra potenza meccanica netta erogata e potenza termica assorbita in caldaia, vale:

$$\frac{\dot{L}_{\text{turbina}} - |\dot{L}_{\text{pompa}}|}{\dot{Q}_{\text{caldaia}}} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} \equiv \frac{(h_3 - h_2) - (h_4 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = \frac{\dot{Q}_{\text{caldaia}} - |\dot{Q}_{\text{condensatore}}|}{\dot{Q}_{\text{caldaia}}} = 0.080 = 8\%$$

– Commenti

I primi motori a vapore non erano molto efficienti.

La potenza assorbita dalla pompa è in prima approssimazione trascurabile rispetto a quella erogata dalla turbina.

Nelle locomotive, per ridurre le masse da movimentare e semplificare il sistema, il vapore saturo al termine dell'espansione veniva scaricato in atmosfera anziché essere inviato in un condensatore, mentre il liquido da comprimere e poi vaporizzare in caldaia era prelevato da un serbatoio (da riempire ad ogni stazione). Inoltre, anziché in una turbina, l'espansione avveniva generalmente in dispositivi a moto alternativo.

### D.XI. Ciclo Rankine ideale con surriscaldamento

– Problema

Si consideri un ciclo di Rankine ideale con surriscaldamento, in cui il fluido di lavoro è acqua. Siano 25 kPa la pressione nel condensatore, in cui il l'acqua entra in stato di miscela satura liquido-vapore con titolo 98.2%, e 20 bar la pressione in caldaia. La potenza termica assorbita dal fluido durante il passaggio in caldaia è pari a 50 MW. Determinare:

- la temperatura del vapore al termine del surriscaldamento
- la portata di vapore
- la potenza netta ottenuta dal ciclo
- il rendimento di primo principio del ciclo

Risolvere il problema analiticamente e rappresentare graficamente il processo, indicando inoltre le ipotesi di lavoro formulate.

– Dati

fluido di lavoro: acqua

$$p_{\text{condensatore}} = 25 \text{ kPa} = 25 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$x_{\text{condensatore}} = 98.2\% = 0.982$$

$$p_{\text{caldaia}} = 20 \text{ bar} = 2.0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\dot{Q}_{\text{caldaia}} = 50 \text{ MW} = 50 \cdot 10^6 \text{ W}$$

– Determinare

Vedi testo.

– Ipotesi

Ciclo ideale  $\Rightarrow$  processi internamente reversibili.

Singoli componenti  $\Rightarrow$  sistemi aperti in condizioni stazionarie.

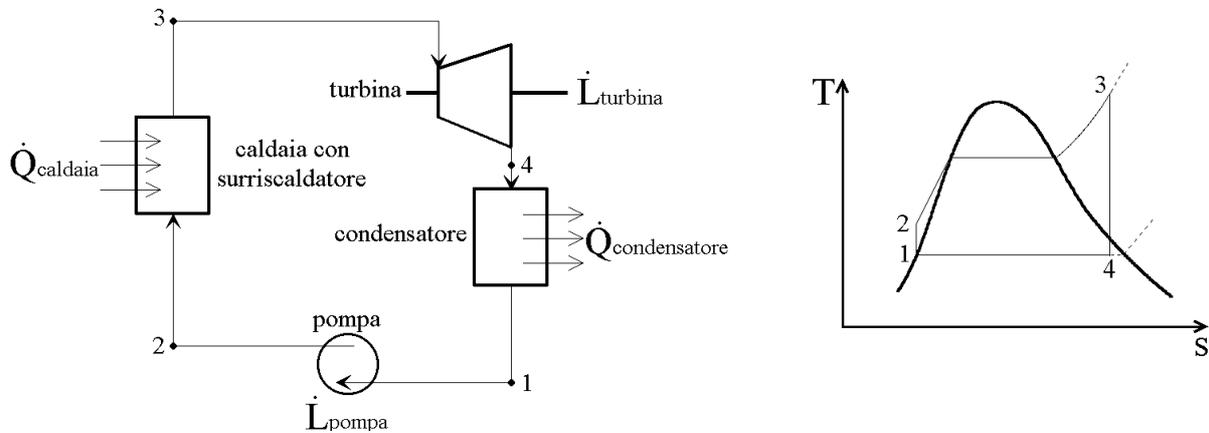
Variazioni di energia cinetica e potenziale trascurabili.

Pompa e turbina adiabatiche.

Nella pompa entra liquido saturo.

– Soluzione

L'architettura del sistema ed il ciclo a cui viene sottoposto il fluido di lavoro sono rappresentati di seguito.



Per risolvere il problema, è necessario individuare gli stati del fluido di lavoro all'inizio e alla fine di ogni trasformazione, vale a dire all'ingresso e all'uscita di ogni componente, e quindi determinare i corrispondenti valori dell'entalpia specifica. Infatti, schematizzando i singoli componenti del ciclo come sistemi aperti a due correnti in condizioni stazionarie, in cui si trascurano le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio dell'energia assume per tutti la forma:

$$\dot{m}\Delta h = \dot{Q} - \dot{L} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h = q - \ell$$

Lo stato in 1 è per ipotesi quello di liquido saturo. Pertanto, la temperatura di saturazione e le proprietà di interesse del fluido si possono ricavare dalla tabella in pressione delle proprietà dell'acqua saturo.

$$p_1 = p_{\text{condensatore}} = 25 \cdot 10^3 \text{ Pa} \Rightarrow \begin{aligned} T_1 &= T_{\text{sat}@p_1} = 64.97^\circ\text{C} = 338.12 \text{ K} \\ h_1 &= h_{\ell}@p_1 = 271.93 \text{ kJ/kg} = 0.27193 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

La pompa comprime il liquido adiabaticamente e reversibilmente, per cui sono da considerarsi nulli gli scambi termici con l'esterno e le dissipazioni viscosse. La variazione di temperatura dell'acqua è quindi legata alla sola variazione di pressione ed è tipicamente trascurabile (nel diagramma T-s è amplificata notevolmente per ragioni di chiarezza). Il liquido sottoraffreddato in 2 si trova così ad una temperatura praticamente coincidente con quella del liquido saturo in 1, per cui le sue proprietà possono essere stimate come segue:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_{\text{caldaia}} = 2.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow v_2 \cong v_1 = v_{\ell}@T_1 = 1.020 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg} \\ T_2 &\cong T_1 = 338.12 \text{ K} \Rightarrow h_2 = h_1 + v_1(p_2 - p_1) = 0.2739 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

Per lo stato 4 è nota la pressione, ma non la temperatura. Considerando però che nella turbina, che è un sistema aperto a due correnti operante in condizioni stazionarie, si realizza un'espansione adiabatica e reversibile, si ricava dall'equazione di bilancio entropico dei sistemi aperti (cfr. D.VIII):

$$s_3 = s_4$$

Ma all'entropia della miscela saturo liquido-vapore in 4 si applica la relazione:

$$s_4 = s_{\ell}@p_4 + x_4(s_{v}@p_4 - s_{\ell}@p_4)$$

in cui i valori dell'entropia specifica del liquido saturo e del vapore saturo secco possono essere ricavati dalla tabella in pressione delle proprietà dell'acqua saturo:

$$s_{\ell @ 25 \text{ kPa}} = 0.8931 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$s_{\text{v} @ 25 \text{ kPa}} = 7.8314 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Da ciò si ricava che l'entropia specifica in 4 e, quindi, in 3 vale:

$$s_4 = s_3 = 0.8931 + 0.982 \cdot (7.8314 - 0.8931) = 7706.5 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Dalla tabella delle proprietà del vapore d'acqua surriscaldato si ottiene così che, a pressione 2.0 MPa ed entropia 7.7024 kJ/(kg·K) (valore questo prossimo a sufficienza a quello precedentemente determinato da rendere inutile un'interpolazione lineare), la temperatura del vapore d'acqua surriscaldato è pari a 600°C e, quindi, che l'entalpia specifica all'inizio dell'espansione vale:

$$h_3 = h_{@ 2.0 \text{ MPa} \& 600^\circ\text{C}} = 3690.1 \text{ kJ/kg} = 3.6901 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Per ciò che concerne la miscela satura di liquido e vapore in 4, i valori dell'entalpia specifica del liquido saturo e del vapore saturo secco alla pressione nel condensatore possono essere ricavati dalla tabella in pressione delle proprietà dell'acqua satura.

$$h_{\ell @ 25 \text{ kPa}} = 271.93 \text{ kJ/kg} = 0.27193 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$h_{\text{v} @ 25 \text{ kPa}} = 2618.2 \text{ kJ/kg} = 2.6182 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

In definitiva, l'entalpia specifica della miscela satura in 4 vale:

$$h_4 = h_{\ell @ p_4} + x_4 (h_{\text{v} @ p_4} - h_{\ell @ p_4}) = 2.5760 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto alla caldaia, in cui non sono presenti dispositivi che scambiano lavoro meccanico col fluido, si ottiene:

$$\dot{Q}_{\text{caldaia}} = \dot{m}(h_3 - h_2)$$

da cui si può ricavare la portata in massa di fluido:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{\text{caldaia}}}{(h_3 - h_2)} = \frac{50 \cdot 10^6}{(3.6901 \cdot 10^6 - 0.2739 \cdot 10^6)} = 14.64 \text{ kg/s}$$

Applicando alla turbina, che opera adiabaticamente, l'equazione di bilancio di sistema aperto, si ottiene:

$$\dot{L}_{\text{turbina}} = -\dot{m}(h_4 - h_3) \equiv \dot{m}(h_3 - h_4) = 16.3 \cdot 10^6 \text{ W} = 16.3 \text{ MW}$$

Il valore ottenuto è positivo in quanto la potenza è erogata verso l'esterno.

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto alla pompa, che pure opera adiabaticamente, si ottiene:

$$|\dot{L}_{\text{pompa}}| = |-\dot{m}(h_2 - h_1)| \equiv \dot{m}(h_2 - h_1) = 29.5 \cdot 10^3 \text{ W} = 29.5 \text{ kW}$$

La potenza meccanica netta erogata dal ciclo vale quindi:

$$\dot{L}_{\text{turbina}} - |\dot{L}_{\text{pompa}}| = 16.3 \cdot 10^6 \text{ W} = 16.3 \text{ MW}$$

Infine, il rendimento di primo principio del ciclo, dato dal rapporto tra potenza meccanica netta erogata e potenza termica assorbita in caldaia, vale:

$$\frac{\dot{L}_{\text{turbina}} - |\dot{L}_{\text{pompa}}|}{\dot{Q}_{\text{caldaia}}} = 0.326 = 32.6\%$$

**D.XII. Ciclo frigorifero ideale a R134a**

– Problema

Si consideri un sistema di refrigerazione che implementa un ciclo frigorifero ideale con Refrigerante 134a. L’ambiente refrigerato si trova a  $-4^{\circ}\text{C}$ , l’ambiente caldo a  $35.53^{\circ}\text{C}$ . La portata in massa del refrigerante è  $10\text{ g/s}$ . Determinare:

- a) il titolo del fluido frigorifero al termine della laminazione
- b) la potenza assorbita dal compressore
- c) il potere refrigerante del sistema frigorifero
- d) il coefficiente di prestazione del sistema frigorifero

Risolvere il problema analiticamente e rappresentare graficamente il processo, indicando inoltre le ipotesi di lavoro formulate.

– Dati

fluido di lavoro: Freon R134a

$T_F = -4^{\circ}\text{C} = 269.15\text{ K}$

$T_C = 35.53^{\circ}\text{C} = 308.68\text{ K}$

$\dot{m} = 10\text{ g/s} = 0.010\text{ kg/s}$

– Determinare

Vedi testo.

– Ipotesi

Ciclo ideale  $\Rightarrow$  processi internamente reversibili (eccetto la laminazione).

Singoli componenti  $\Rightarrow$  sistemi aperti in condizioni stazionarie.

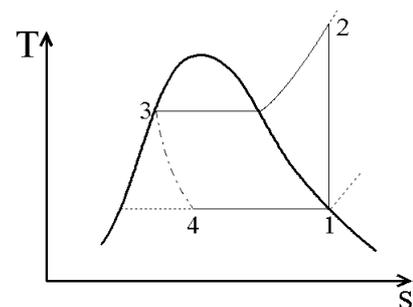
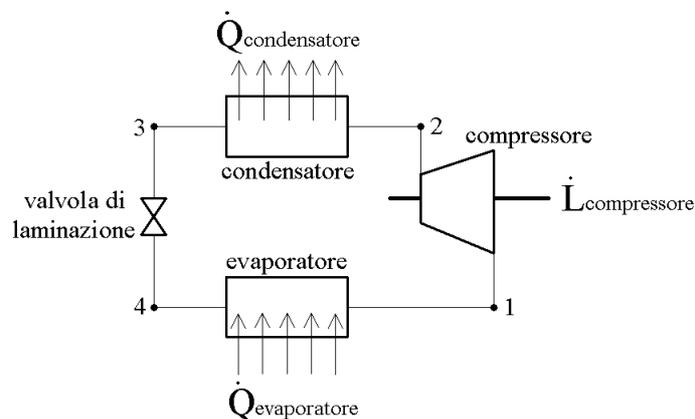
Variazioni di energia cinetica e potenziale trascurabili.

Compressore e valvola di laminazione adiabatici.

Nel compressore entra vapore saturo secco, dal condensatore esce liquido saturo.

– Soluzione

L’architettura del sistema ed il ciclo a cui viene sottoposto il fluido di lavoro sono rappresentati di seguito.



Per risolvere il problema, è necessario individuare gli stati del fluido di lavoro all’inizio e alla fine di ogni trasformazione, vale a dire all’ingresso e all’uscita di ogni componente, e

determinare i corrispondenti valori dell'entalpia specifica. Schematizzando i singoli componenti del ciclo come sistemi aperti a due correnti in condizioni stazionari, in cui si trascurano le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio dell'energia assume per tutti la forma:

$$\dot{m}\Delta h = \dot{Q} - \dot{L} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h = q - \ell$$

Lo stato in 1 è per ipotesi quello di vapore saturo secco. Pertanto, la pressione di saturazione e le proprietà di interesse del fluido si possono ricavare dalla tabella in temperatura delle proprietà dell'R134a saturo:

$$T_1 = T_{\text{evaporatore}} = -4^\circ\text{C} \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= p_{\text{sat}@T_1} = 0.25274 \text{ MPa} = 0.25274 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ h_1 &= h_{v@T_1} = 244.90 \text{ kJ/kg} = 0.24490 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

Poiché il processo di condensazione è isobaro, la pressione in 2, all'uscita del compressore e all'ingresso del condensatore, sarà pari alla pressione di condensazione. Questa può essere desunta dalla temperatura di condensazione impiegando le tabelle delle proprietà dell'R134a saturo. In particolare, si verifica dalla tabella in pressione delle proprietà dell'R134a saturo che:

$$T_{\text{condensatore}} = 35.53^\circ\text{C} \Rightarrow p_2 = p_3 = p_{\text{sat}@35.53^\circ\text{C}} = 0.90 \text{ MPa} = 0.90 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

La temperatura al termine della compressione rimane tuttavia incognita. Considerando però che nel compressore, che è un sistema aperto a due correnti operante in condizioni stazionarie, si realizza una compressione adiabatica e reversibile, si ricava dall'equazione di bilancio entropico dei sistemi aperti (cfr. D.V) che la trasformazione è anche isoentropica. Dalla tabella in temperatura delle proprietà dell'R134a saturo si ricava quindi

$$s_2 = s_1 = s_{v@-4^\circ\text{C}} = 0.9213 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Dalle tabelle delle proprietà dell' R134a si ottiene così che, a pressione 0.90 MPa ed entropia 0.9217 kJ/(kg·K) (valore questo prossimo a sufficienza a quello precedentemente determinato da rendere inutile un'interpolazione lineare), il vapore surriscaldato alla fine della compressione presenta temperatura pari a 40°C e, quindi, che la sua entalpia specifica vale:

$$h_2 = h_{@0.90 \text{ MPa}\&40^\circ\text{C}} = 271.25 \text{ kJ/kg} = 0.27125 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Lo stato in 3 è per ipotesi quello di liquido saturo. Pertanto, la pressione di saturazione e le proprietà di interesse del fluido si possono ricavare dalla tabella in pressione delle proprietà dell'R134a saturo:

$$p_3 = p_{\text{condensatore}} = 0.90 \text{ MPa} \Rightarrow h_3 = h_{\ell@0.90 \text{ MPa}} = 99.56 \text{ kJ/kg} = 0.09956 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Infine, dall'equazioni di bilancio energetico dei sistemi aperti si ricava che una laminazione adiabatica è anche isoentalpica (cfr. D.IX). Si ha pertanto:

$$h_4 = h_3 = 99.56 \text{ kJ/kg} = 0.09956 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Per ciò che concerne la valutazione del titolo al termine della laminazione, si consideri che per l'entalpia specifica della miscela satura liquido-vapore in 4 vale la relazione:

$$h_4 = h_{\ell@T_4} + x_4 (h_{v@T_4} - h_{\ell@T_4})$$

in cui i valori dell'entalpia specifica del liquido saturo e del vapore saturo secco alla temperatura nell'evaporatore possono essere ricavati dalla tabella in temperatura delle proprietà dell' R134a saturo:

$$h_{\ell@-4^\circ\text{C}} = 44.75 \text{ kJ/kg} = 0.04475 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$h_{v@-4^\circ\text{C}} = 244.90 \text{ kJ/kg} = 0.24490 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Da ciò si ricava che il titolo al termine dell'espansione vale:

$$x_4 = \frac{h_4 - h_{\ell @ T_4}}{h_{v @ T_4} - h_{\ell @ T_4}} = \frac{99.56 - 44.75}{244.90 - 44.75} = 0.27 = 27\%$$

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto al compressore, che opera adiabaticamente, si ottiene:

$$|\dot{L}_{\text{compressore}}| = |\dot{m}(h_2 - h_1)| \equiv \dot{m}(h_2 - h_1) = 264 \text{ W}$$

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto all'evaporatore, in cui non sono presenti dispositivi che scambiano lavoro meccanico col fluido, si ottiene il potere refrigerante del sistema:

$$\dot{Q}_{\text{evaporatore}} = \dot{m}(h_1 - h_4) = 1453 \text{ W}$$

Infine, il coefficiente di prestazione del ciclo, dato dal rapporto tra potenza termica assorbita all'evaporatore e potenza meccanica assorbita dal compressore, vale:

$$\text{COP} = \frac{\dot{Q}_{\text{evaporatore}}}{|\dot{L}_{\text{compressore}}|} = 5.52$$

– Commenti

Negli impianti frigoriferi si cerca di far lavorare ogni parte del sistema (condensatore, evaporatore, ecc.) a pressione maggiore del valore atmosferico, al fine di evitare l'ingresso di aria (che è incondensabile) nei circuiti.

Il coefficiente di prestazione di un ciclo di Carnot inverso operante tra le temperature di evaporazione e di condensazione sarebbe pari a:

$$\text{COP}_{\text{Carnot}} = \frac{T_{\text{evaporatore}}}{T_{\text{condensatore}} - T_{\text{evaporatore}}} \equiv \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{268.15}{308.68 - 269.15} = 6.81$$

Il valore ottenuto è superiore a quello del ciclo precedentemente analizzato. La causa è nelle irreversibilità associate al desurriscaldamento del vapore all'ingresso del condensatore e nelle irreversibilità interne del processo di laminazione.

**D.XIII. Pompa di calore a R134a**

– Problema

Si consideri una pompa di calore per climi artici, basata su un ciclo frigorifero ideale impiegante Refrigerante 134a. L'ambiente freddo esterno si trova a temperatura  $-30^\circ\text{C}$ , mentre l'ambiente da riscaldare deve essere mantenuto ad una temperatura di  $25.53^\circ\text{C}$ . Per rendere possibile lo scambio termico, la condensazione deve avvenire ad una temperatura superiore di  $10^\circ\text{C}$  a quella dell'ambiente caldo, mentre l'evaporazione deve avvenire ad una temperatura di  $10^\circ\text{C}$  inferiore a quella dell'ambiente freddo. Il potere di riscaldamento del sistema deve essere pari a 10 kW. Determinare:

- a) il titolo del fluido frigorifero al termine della laminazione
- b) la portata in massa del fluido frigorifero
- c) la potenza assorbita dal compressore
- d) il coefficiente di prestazione della pompa di calore

Risolvere il problema analiticamente e rappresentare graficamente il processo, indicando inoltre le ipotesi di lavoro formulate.

– Dati

fluido di lavoro: Freon R134a

$$T_F = -30^\circ\text{C}$$

$$T_F - T_{\text{evaporatore}} = 10^\circ\text{C}$$

$$T_C = 25.53^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{condensatore}} - T_C = 10^\circ\text{C}$$

$$|\dot{Q}_{\text{condensatore}}| = 10 \text{ kW} = 10 \cdot 10^3 \text{ W}$$

– Determinare

Vedi testo.

– Ipotesi

Ciclo ideale  $\Rightarrow$  processi internamente reversibili (eccetto la laminazione).

Singoli componenti  $\Rightarrow$  sistemi aperti in condizioni stazionarie.

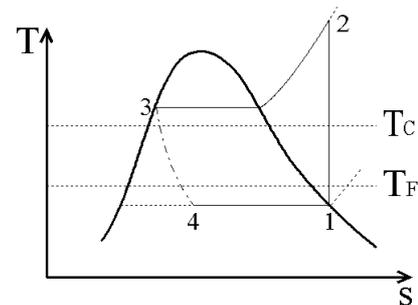
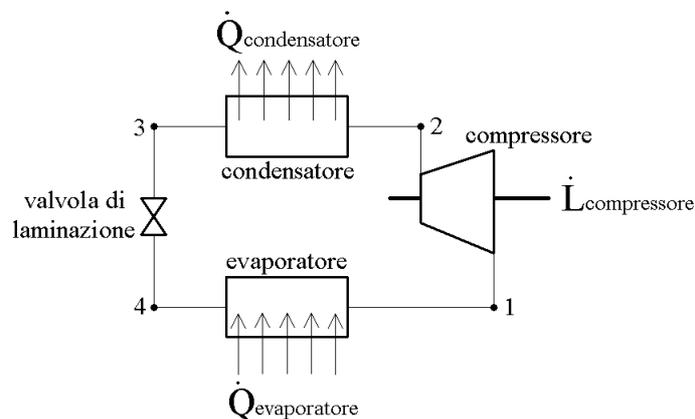
Variazioni di energia cinetica e potenziale trascurabili.

Compressore e valvola di laminazione adiabatici.

Nel compressore entra vapore saturo secco, dal condensatore esce liquido saturo.

– Soluzione

L'architettura del sistema ed il ciclo a cui viene sottoposto il fluido di lavoro sono rappresentati di seguito.



È immediato verificare che le temperature nell'evaporatore e nel condensatore sono pari a:

$$T_{\text{evaporatore}} = -40^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{condensatore}} = 35.53^\circ\text{C}$$

Per risolvere il problema, è necessario individuare gli stati del fluido di lavoro all'inizio e alla fine di ogni trasformazione, vale a dire all'ingresso e all'uscita di ogni componente, e determinare i corrispondenti valori dell'entalpia specifica. Schematizzando i singoli componenti del ciclo come sistemi aperti a due correnti in condizioni stazionarie, in cui si trascurano le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio dell'energia assume per tutti la forma:

$$\dot{m}\Delta h = \dot{Q} - \dot{L} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h = q - \ell$$

Lo stato in 1 è per ipotesi quello di vapore saturo secco. Pertanto, la pressione di saturazione e le proprietà di interesse del fluido si possono ricavare dalla tabella in temperatura delle proprietà dell'R134a saturo.

$$T_1 = T_{\text{evaporatore}} = -40^\circ\text{C} \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= p_{\text{sat}@T_1} = 0.05164 \text{ MPa} = 0.05164 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ h_1 &= h_{\text{v}@T_3} = 222.88 \text{ kJ/kg} = 0.22288 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

Poiché il processo di condensazione è isobaro, la pressione in 2, all'uscita del compressore e all'ingresso del condensatore, sarà pari alla pressione di condensazione. Questa può essere desunta dalla temperatura di condensazione, impiegando le tabelle delle proprietà dell'R134a saturo. In particolare, dalla tabella in pressione delle proprietà si verifica che:

$$T_{\text{condensatore}} = 35.53^\circ\text{C} \Rightarrow p_2 = p_3 = p_{\text{sat}@35.53^\circ\text{C}} = 0.90 \text{ MPa} = 0.90 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

La temperatura al termine della compressione rimane incognita. Considerando però che nel compressore, che è un sistema aperto a due correnti operante in condizioni stazionarie, si realizza una compressione adiabatica e reversibile, si ricava dall'equazione di bilancio entropico dei sistemi aperti (cfr. D.V) che la trasformazione è anche isoentropica. Dalla tabella in temperatura delle proprietà dell'R134a saturo si ricava quindi

$$s_2 = s_1 = s_{\text{v}@-40^\circ\text{C}} = 0.9560 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Dalle tabelle delle proprietà dell' R134a si ottiene così che, a pressione 0.90 MPa ed entropia 0.9566 kJ/(kg·K) (valore questo prossimo a sufficienza a quello precedentemente determinato da rendere inutile un'interpolazione lineare), il vapore surriscaldato alla fine della compressione presenta temperatura pari a 50°C e, quindi, che la sua entalpia specifica vale:

$$h_2 = h_{\text{@}0.90 \text{ MPa}\&50^\circ\text{C}} = 282.34 \text{ kJ/kg} = 0.28234 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Lo stato in 3 è per ipotesi quello di liquido saturo. Pertanto, la pressione di saturazione e le proprietà di interesse del fluido si possono ricavare dalla tabella in pressione dell'R134a saturo:

$$p_3 = p_{\text{condensatore}} = 0.90 \text{ MPa} \Rightarrow h_3 = h_{\ell@p_3} = 99.56 \text{ kJ/kg} = 0.09956 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Infine, dall'equazioni di bilancio energetico dei sistemi aperti si ricava che una laminazione adiabatica è anche isoentalpica (cfr. D.IX). Si ha pertanto:

$$h_4 = h_3 = 99.56 \text{ kJ/kg} = 0.09956 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Per ciò che concerne la valutazione del titolo al termine della laminazione, si consideri che per l'entalpia specifica della miscela saturo liquido-vapore in 4 vale la relazione:

$$h_4 = h_{\ell@T_4} + x_4 (h_{\text{v}@T_4} - h_{\ell@T_4})$$

in cui i valori dell'entalpia specifica del liquido saturo e del vapore saturo secco alla temperatura nell'evaporatore possono essere ricavati dalla tabella in temperatura delle proprietà dell' R134a saturo:

$$\begin{aligned} h_{\ell@-40^\circ\text{C}} &= 0 \text{ kJ/kg} \\ h_{\text{v}@-40^\circ\text{C}} &= 222.88 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Da ciò si ricava che il titolo al termine dell'espansione vale:

$$x_4 = \frac{h_4 - h_{\ell@T_4}}{h_{\text{v}@T_4} - h_{\ell@T_4}} = \frac{99.56 - 0}{222.88 - 0} = 0.48 = 48\%$$

La portata di fluido può essere ricavata dall'equazione di bilancio di sistema aperto relativa al condensatore:

$$\dot{m} = \frac{|\dot{Q}_{\text{condensatore}}|}{|h_3 - h_2|} \equiv \frac{|\dot{Q}_{\text{condensatore}}|}{h_2 - h_3} = \frac{10000}{0.28234 \cdot 10^6 - 0.09956 \cdot 10^6} = 0.055 \text{ kg/s}$$

Applicando l'equazione di bilancio di sistema aperto al compressore, che opera adiabaticamente, si ottiene:

$$|\dot{L}_{\text{compressore}}| = |-\dot{m}(h_2 - h_1)| \equiv \dot{m}(h_2 - h_1) = 3253 \text{ W}$$

Infine, il coefficiente di prestazione della pompa di calore, dato dal rapporto tra potenza termica ceduta al condensatore e potenza meccanica assorbita dal compressore, vale:

$$\text{COP}_{\text{pdc}} = \frac{|\dot{Q}_{\text{condensatore}}|}{|\dot{L}_{\text{compressore}}|} = 3.07$$

– Commenti

Nella pratica, la notevole differenza di temperatura tra ambiente riscaldato ed ambiente freddo esterno comporterebbe un COP effettivo della pompa di calore notevolmente inferiore al valore teorico precedentemente stimato. Inoltre, l'evaporatore è in depressione, il che suggerisce l'opportunità di impiegare un diverso fluido frigorifero.

**D.XIV. Miscelazione adiabatica di due correnti**

– Problema

Una portata di 150 kg/min di acqua a 6 bar e 50°C viene miscelata con una portata di 90 kg/min di acqua a 6 bar e 200°C. Determinare lo stato dell'acqua in entrambi i casi. Inoltre, sapendo che il processo di miscelazione è stazionario e che il dispositivo in cui la miscelazione avviene presenta pareti termicamente isolate, determinare lo stato della portata d'acqua in uscita, che è estratta dal miscelatore a 6 bar. A tal scopo, si trascurino gli effetti cinetici e potenziali.

– Dati

fluido di lavoro: acqua

$$p_1 = 6 \text{ bar} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 50^\circ\text{C}$$

$$p_2 = 6 \text{ bar} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 200^\circ\text{C}$$

$$\dot{m}_1 = 150 \text{ kg/min} = 2.5 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_2 = 90 \text{ kg/min} = 1.5 \text{ kg/s}$$

$$p_3 = 6 \text{ bar} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

– Determinare

Stati in ingresso e in uscita.

– Ipotesi

Processo stazionario e adiabatico, effetti cinetici e potenziali trascurabili.

– Soluzione

La pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura  $T_1$  di  $50^\circ\text{C}$  si ricava dalle proprietà tabulate in temperatura per l'acqua saturata:

$$p_{\text{sat},1} = p_{\text{sat}@T_1} = 12.349 \text{ kPa} = 0.12349 \text{ bar} < p_1$$

Si ha pertanto a che fare con un liquido sottoraffreddato. Per stimarne l'entalpia specifica, occorre conoscere le proprietà del liquido saturo a temperatura  $T_1$ , che si ricavano da tabella:

$$v_{\ell,1} = v_{\ell@T_1} = 0.001012 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$h_{\ell,1} = h_{\ell@T_1} = 209.33 \text{ kJ/kg} = 0.20933 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

L'entalpia specifica nello stato 1 vale:

$$h_1 = h_{\ell,1} + v_{\ell,1}(p_1 - p_{\text{sat},1}) = 0.2099 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

La pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura  $T_2$  di  $200^\circ\text{C}$  si ricava anch'essa da tabella:

$$p_{\text{sat},2} = p_{\text{sat}@T_2} = 1.5538 \text{ MPa} = 15.538 \text{ bar} > p_2$$

Si ha pertanto a che fare con un vapore surriscaldato. L'entalpia specifica nello stato 2, a pressione  $p_2$  e temperatura  $T_2$ , si ricava dalle proprietà tabulate in temperatura e pressione per il vapore d'acqua surriscaldato:

$$h_2 = h_{@p_2\&T_2} = 2850.1 \text{ kJ/kg} = 2.8501 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

L'equazione di bilancio delle masse per un flusso stazionario a due ingressi (pedici 1 e 2) ed una uscita (pedice 3) presenta forma

$$\sum_{i=1}^3 \dot{m}_i = 0$$

in cui la portata uscente è positiva e quelle entranti sono negative (o viceversa). Ne consegue che la portata in uscita vale:

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 2.5 + 1.5 = 4.0 \text{ kg/s}$$

L'equazione di bilancio dell'energia presenta forma:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \sum_{i=1}^3 \dot{m}_i \left( h_i + \frac{w_i^2}{2} + gz_i \right)$$

Nel miscelatore non sono presenti dispositivi di pompaggio. Inoltre, le pareti sono termicamente isolate e, quindi, è nullo lo scambio di calore. Trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio dell'energia assume la seguente forma semplificata:

$$\sum_{i=1}^3 \dot{m}_i h_i = 0$$

In pratica, l'entalpia della corrente in uscita è pari alla media pesata sulle portate in massa delle entalpie in ingresso.

$$h_3 = \frac{\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2}{\dot{m}_3} = 1.200 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = 1200 \text{ kJ/kg}$$

Per stabilire lo stato fisico della corrente 3 di acqua, il valore della sua entalpia specifica va confrontato con quelli del liquido saturo e del vapore saturo secco alla pressione di uscita  $p_3$ . Tali valori si ricavano dalle proprietà tabulate in pressione per l'acqua satura:

$$h_{\ell,3} = h_{\ell @ p_3} = 670.56 \text{ kJ/kg} = 0.67056 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$h_{v,3} = h_{v @ p_3} = 2756.8 \text{ kJ/kg} = 2.7568 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Il confronto mostra che:

$$h_{\ell,3} < h_3 < h_{v,3}$$

Si ha pertanto a che fare con una miscela saturo di liquido e vapore. Per individuarne univocamente la qualità, occorre stimarne il titolo, che sarà tale che:

$$h_3 = h_{\ell,3} + x_3(h_{v,3} - h_{\ell,3})$$

In conclusione, il titolo della miscela saturo liquido-vapore estratta dal miscelatore vale:

$$x_3 = \frac{h_3 - h_{\ell,3}}{h_{v,3} - h_{\ell,3}} = 0.254 = 25.4\%$$

#### D.XV. Miscelazione di tre correnti

##### – Problema

Ad una portata di 150 kg/min di una miscela saturo di liquido e vapore d'acqua con pressione 6 bar e titolo 77% vengono contemporaneamente miscelate una portata di 9 kg/min d'acqua liquida a 6 bar e 50°C ed una portata da stabilire di vapore d'acqua surriscaldato a 20 bar e 500°C. Per conduzione attraverso le pareti del miscelatore si perde verso l'esterno una potenza termica pari a 24 kW. Considerando il processo stazionario e trascurando gli effetti cinetici e potenziali, determinare quanto vale in massa la portata di vapore surriscaldato da immettere nel miscelatore per ottenere in uscita ancora vapore surriscaldato con pressione 4 bar e temperatura 300°C.

##### – Dati

fluido di lavoro: acqua

$$p_1 = 6 \text{ bar} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$x_1 = 77\%$$

$$\dot{m}_1 = 150 \text{ kg/min} = 2.5 \text{ kg/s}$$

$$p_2 = 6 \text{ bar} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 50^\circ\text{C}$$

$$\dot{m}_2 = 9 \text{ kg/min} = 0.15 \text{ kg/s}$$

$$p_3 = 20 \text{ bar} = 2.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2.0 \text{ MPa}$$

$$T_3 = 500^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q}_{\text{pareti}} = 24 \text{ kW} = 24 \cdot 10^3 \text{ W}$$

$$p_4 = 4 \text{ bar} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0.4 \text{ MPa}$$

$$T_4 = 300^\circ\text{C}$$

– Determinare

Portata in massa di vapore surriscaldato immesso ( $\dot{m}_3$ ).

– Ipotesi

Processo stazionario, effetti cinetici e potenziali trascurabili.

– Soluzione

L'equazione di bilancio delle masse per un flusso stazionario a tre ingressi (pedici 1, 2 e 3) ed una uscita (pedice 4) presenta forma

$$\sum_{i=1}^4 \dot{m}_i = 0$$

in cui la portata uscente è positiva e quelle entranti negative (o viceversa). Ne consegue che la portata in uscita vale:

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

L'equazione di bilancio dell'energia è:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \sum_{i=1}^4 \dot{m}_i \left( h_i + \frac{w_i^2}{2} + gz_i \right)$$

La potenza termica scambiata è quella persa attraverso le pareti (negativa perché sottratta al fluido):

$$\dot{Q} = -\dot{Q}_{\text{pareti}} = -24 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Nel miscelatore non sono presenti dispositivi di pompaggio. Trascurando le variazioni di energia cinetica e potenziale, l'equazione di bilancio dell'energia assume la seguente forma semplificata:

$$\sum_{i=1}^4 \dot{m}_i h_i = -\dot{Q}_{\text{pareti}}$$

ovvero

$$(\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3) h_4 - \dot{m}_1 h_1 - \dot{m}_2 h_2 - \dot{m}_3 h_3 = -\dot{Q}_{\text{pareti}}$$

Per valutare l'entalpia specifica della corrente 1 di acqua, si ricavano dalle proprietà tabulate in pressione per l'acqua saturo le entalpie specifiche del liquido saturo e del vapore saturo secco alla pressione  $p_1$ :

$$h_{\ell,1} = h_{\ell @ p_1} = 670.56 \text{ kJ/kg} = 0.67056 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$h_{v,1} = h_{v @ p_1} = 2756.8 \text{ kJ/kg} = 2.7568 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

Pertanto:

$$h_1 = h_{\ell,1} + x_1 (h_{v,1} - h_{\ell,1}) = 2.2770 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

La pressione di saturazione dell'acqua alla temperatura  $T_2$  di 50°C si ricava dalle proprietà tabulate in temperatura per l'acqua saturo:

$$p_{\text{sat},2} = p_{\text{sat} @ T_2} = 12.349 \text{ kPa} = 0.12349 \text{ bar}$$

Nella corrente 2 si ha quindi un liquido sottoraffreddato. Per stimarne l'entalpia specifica, occorre poi conoscere le proprietà del liquido saturo a temperatura  $T_2$ , che si ricavano da tabella:

$$v_{\ell,2} = v_{\ell@T_2} = 0.001012 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$h_{\ell,2} = h_{\ell@T_2} = 209.33 \text{ kJ/kg} = 0.20933 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

L'entalpia specifica nello stato 2 vale quindi:

$$h_1 = h_{\ell,2} + v_{\ell,2}(p_1 - p_{\text{sat},2}) = 0.2099 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

L'entalpia specifica del vapore surriscaldato nello stato 3, a pressione  $p_3$  e temperatura  $T_3$ , si ricava dalle proprietà tabulate in temperatura e pressione per il vapore d'acqua surriscaldato:

$$h_3 = h_{@p_3\&T_3} = 3467.6 \text{ kJ/kg} = 3.4676 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

L'entalpia specifica del vapore surriscaldato nello stato 4, a pressione  $p_4$  e temperatura  $T_4$ , si ricava anch'essa dalle proprietà tabulate in temperatura e pressione per il vapore d'acqua surriscaldato:

$$h_4 = h_{@p_4\&T_4} = 3066.8 \text{ kJ/kg} = 3.0668 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

A questo punto, l'equazione di bilancio energetico del sistema aperto costituito dal miscelatore può essere risolta rispetto all'unica incognita, la portata in massa della corrente 3, ovvero la portata in massa di vapore surriscaldato a temperatura  $T_3$  e pressione  $p_3$  da immettere nel miscelatore:

$$\dot{m}_3 = \frac{(\dot{m}_1 + \dot{m}_2)h_4 - \dot{m}_1 h_1 - \dot{m}_2 h_2 + \dot{Q}_{\text{pareti}}}{h_3 - h_4} = 6.1 \text{ kg/s} = 363 \text{ kg/min}$$

**ESERCIZI UNITA' E – SOMMARIO****E. CONDUZIONE IN GEOMETRIA PIANA**

**E.I. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana semplice**

**E.II. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana con convezione**

**E.III. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana multi-strato**

**E.IV. Parabrezza**

**E.V. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana multi-strato (2)**

**E.VI. Cella frigorifera**

**E.VII. Cella frigorifera con finestra di ispezione**

**E.VIII. Cella frigorifera con finestra di ispezione a doppio vetro**

**E.IX. Scelta di un materiale refrattario**

**E.X. Raffreddamento di un microprocessore**

**E.XI. Raffreddamento di un microprocessore: resistenza di contatto**

**E.XII. Raffreddamento di un microprocessore: resistenza di contatto (2)**

**E.XIII. Conduzione piana con cambiamento di fase**

**E.I. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana semplice**

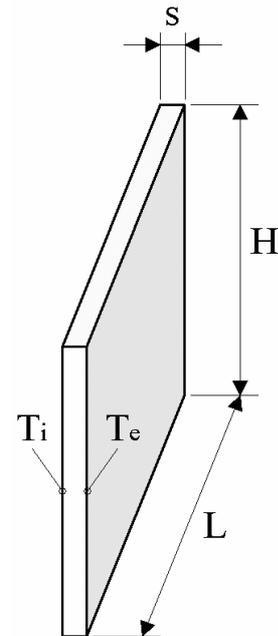
– Problema

Si consideri una parete piana con base 10 m, altezza 3 m e spessore 12 cm, delimitante un vano abitativo e realizzata in un calcestruzzo con conduttività termica pari a 1.4 W/(m°·C). La superficie interna della parete si trova a temperatura 25°C, mentre la superficie esterna si trova a 10°C.

Determinare la potenza termica che attraversa la parete.

– Dati e schema

- $\lambda = 1.4 \text{ W/(m}^\circ\text{·C)}$  (conduttività termica del calcestruzzo)
- $T_i = 25^\circ\text{C}$  (temperatura sulla superficie interna)
- $T_e = 10^\circ\text{C}$  (temperatura sulla superficie esterna)
- $s = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}$  (spessore della parete)
- $L = 10 \text{ m}$  (lato di base della parete)
- $H = 3 \text{ m}$  (altezza della parete)



– Determinare

$\dot{Q}$  (potenza termica attraverso la parete)

– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà del materiale omogenee e indipendenti dalla temperatura, temperature superficiali uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale

– Soluzione

La potenza termica trasferita per conduzione attraverso la parete, dalla superficie più calda a quella più fredda (nello schema, da sinistra a destra), è regolata dalla relazione:

$$(T_i - T_e) = \frac{s}{\lambda A} \dot{Q}$$

L'equazione precedente può anche essere scritta nella forma

$$\Delta T = R \dot{Q}$$

che è l'analogo termico della legge di Ohm

$$\Delta V = RI$$

La resistenza alla conduzione del calore attraverso la parete, R, è definita come:

$$R = \frac{s}{\lambda A} = 0.002857 \text{ }^\circ\text{C/W} = 2.857 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/W}$$

in cui l'area, costante, della sezione di passaggio del flusso di calore è

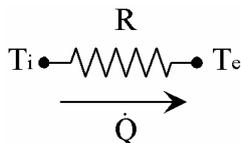
$$A = LH = 30 \text{ m}^2$$

In definitiva, la potenza termica che attraversa la parete vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 5250 \text{ W} = 5.25 \text{ kW}$$

– Commenti

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



Con tale schematizzazione si assume che le superfici di bordo della parete siano adiabatiche. L'approssimazione è generalmente accettabile se lo spessore della parete è piccolo rispetto alle altre dimensioni della parete stessa, poiché la potenza termica che attraversa le superfici di bordo è in tal caso trascurabile rispetto a quella che attraversa le superfici principali.

Il flusso di calore va sempre dalle zone più calde a quelle più fredde.

**E.II. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana con convezione**

– Problema

Si consideri la parete piana di cui al problema precedente, delimitante un vano abitativo. Siano in questo caso pari a 25°C la temperatura interna del vano e a 10°C la temperatura dell'ambiente esterno. I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m<sup>2</sup>·°C) (aria ferma) e 40 W/(m<sup>2</sup>·°C) (condizioni ventose).

Determinare la potenza termica che attraversa la parete. Determinare inoltre le temperature sulle superfici interna ed esterna della parete.

– Dati e schema

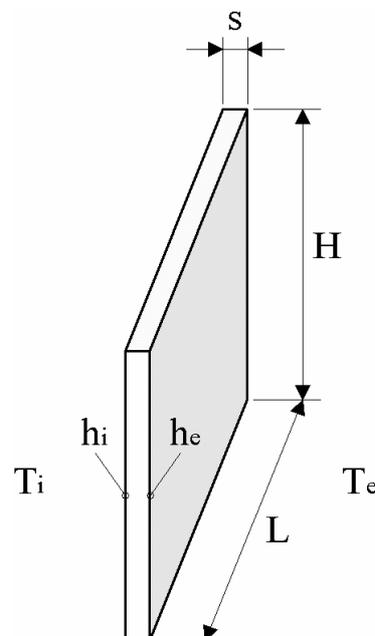
- $\lambda = 1.4 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica del calcestruzzo)
- $T_i = 25^\circ\text{C}$  (temperatura del vano abitativo)
- $T_e = 10^\circ\text{C}$  (temperatura dell'ambiente esterno)
- $s = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}$  (spessore della parete)
- $A = 30 \text{ m}^2$  (area superficiale della parete)
- $h_i = 10 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione interno)
- $h_e = 40 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione esterno)

– Determinare

- $\dot{Q}$  (potenza termica attraverso la parete)
- $T_{i,s}$  (temperatura superficiale interna)
- $T_{e,s}$  (temperatura superficiale esterna)

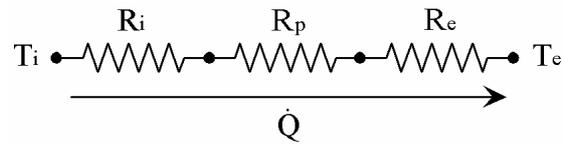
– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà del materiale omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale.



– *Soluzione*

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.003333 \text{ } ^\circ\text{C/W} = 3.333 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_p = \frac{s}{\lambda A} = 0.002857 \text{ } ^\circ\text{C/W} = 2.857 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

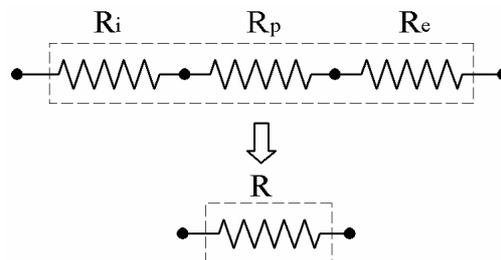
$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.000833 \text{ } ^\circ\text{C/W} = 0.833 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno, la parete in calcestruzzo e lo strato convettivo superficiale esterno.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è regolata dalla relazione:

$$\Delta T = (R_i + R_p + R_e) \dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:



$$R = R_i + R_p + R_e = 0.007024 \text{ } ^\circ\text{C/W} = 7.024 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Pertanto, la potenza termica trasmessa dall'ambiente interno all'ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 2136 \text{ W} = 2.1 \text{ kW}$$

Le temperature superficiali interna ed esterna possono essere determinate considerando che la potenza termica trasmessa deve attraversare ogni singolo strato resistivo, ovvero ogni singola resistenza della serie di resistenze termiche. Valgono di conseguenza le relazioni:

$$T_i - T_{i,s} = R_i \dot{Q}$$

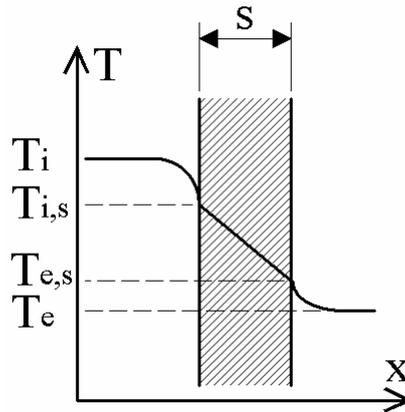
$$T_{e,s} - T_e = R_e \dot{Q}$$

da cui si ottiene

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 17.9^\circ\text{C}$$

$$T_{e,s} = T_e + R_e \dot{Q} = 11.8^\circ\text{C}$$

È infine possibile delinearne l'andamento della temperatura nella direzione perpendicolare alla parete, schematizzato nella figura seguente.



L'andamento attraverso gli strati conduttivi è sempre (in assenza di generazione di calore distribuita) lineare, con pendenza inversamente proporzionale alla conduttività termica. L'andamento in aria, attraverso lo strato limite convettivo esterno e attraverso lo strato limite convettivo interno, è rappresentabile solo qualitativamente.

– Commenti

Se si trascura la convezione, si sovrastima sensibilmente la potenza termica trasmessa. Per stabilizzare la temperatura nel vano abitativo, è necessario che il calore trasmesso verso l'ambiente esterno sia compensato da un uguale apporto calorico, ad esempio fornito da un impianto di riscaldamento a combustibile o da una pompa di calore.

**E.III. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana multi-strato**

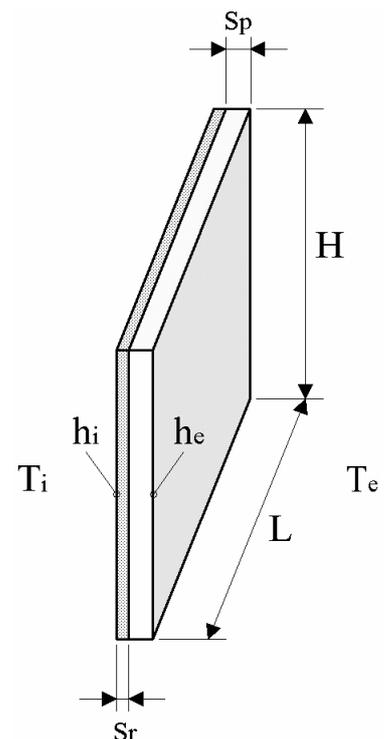
– Problema

Si consideri la parete piana di cui al problema precedente, delimitante un vano abitativo. Siano ancora pari a 25°C la temperatura interna del vano e pari a 10°C la temperatura dell'ambiente esterno, con coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete che valgono, rispettivamente, 10 W/(m<sup>2</sup>·°C) e 40 W/(m<sup>2</sup>·°C). Inoltre, si supponga di ricoprire la superficie interna della parete con un sottile rivestimento di legno di balsa, avente spessore 10 mm e caratterizzato da conduttività termica pari a 0.055 W/(m·°C).

Determinare la potenza termica che attraversa la parete.

– Dati e schema

- $T_i = 25^\circ\text{C}$  (temperatura del vano abitativo)
- $T_e = 10^\circ\text{C}$  (temperatura dell'ambiente esterno)
- $h_i = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione interno)
- $h_e = 40 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione esterno)
- $\lambda_p = 1.4 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività del calcestruzzo)
- $s_p = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}$  (spessore della parete in calcestruzzo)



- $\lambda_r = 0.055 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività del rivestimento in legno di balsa)
- $s_r = 10 \text{ mm} = 0.010 \text{ m}$  (spessore del rivestimento in legno)
- $A = 30 \text{ m}^2$  (area superficiale della parete)

– Determinare

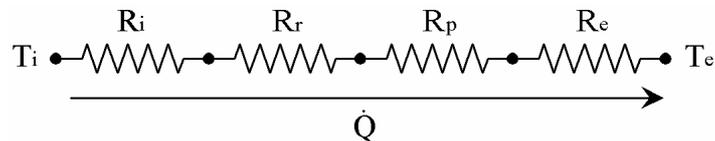
$\dot{Q}$  (potenza termica attraverso la parete)

– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale.

– Soluzione

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui i valori di tutte le resistenze della serie sono già stati calcolati, eccetto quello della resistenza relativa al rivestimento in legno di balsa, che vale:

$$R_r = \frac{s_r}{\lambda_r A} = 0.006061 \text{ °C/W} = 6.061 \cdot 10^{-3} \text{ °C/W}$$

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è quindi regolata dalla relazione:

$$\Delta T = (R_i + R_r + R_p + R_e) \dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_r + R_p + R_e = 0.013084 \text{ °C/W} = 13.084 \cdot 10^{-3} \text{ °C/W}$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 1146 \text{ W} = 1.1 \text{ kW}$$

– Commenti

Si noti come un sottile rivestimento a bassa conducibilità abbia un effetto isolante comparabile a quello dell'intera parete in calcestruzzo. Il rivestimento assicura anche una superficie più calda delle pareti. Infatti, la temperatura superficiale interna vale:

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 21.2 \text{ °C}$$

Il risultato è significativamente superiore a quello ottenuto in precedenza, pari a 17.9°C.

Al fine di minimizzare gli errori di troncamento, nei calcoli intermedi delle resistenze termiche è stato mantenuto un numero di cifre significative largamente superiore all'accuratezza che ci si attende sulla stima finale della potenza termica trasmessa.

**E.IV. Parabrezza**

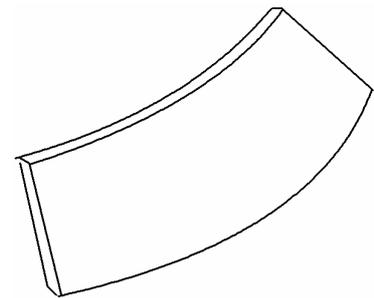
– Problema

Il parabrezza in vetro di un'automobile, con spessore 4 mm e conduttività termica 0.73 W/(m·°C), viene disappannato ventilando la sua superficie interna con aria calda a 40°C. Il coefficiente di scambio termico convettivo medio sul lato interno del parabrezza è stimato pari a 30 W/(m<sup>2</sup>·°C). All'esterno la temperatura è pari a -5°C, mentre il coefficiente di convezione medio vale 65 W/(m<sup>2</sup>·°C).

Determinare le temperature sulla superficie interna e sulla superficie esterna del parabrezza.

– Dati e schema

- $T_i = 40^\circ\text{C}$  (temperatura dell'aria interna)
- $h_i = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione interno)
- $T_e = -5^\circ\text{C}$  (temperatura dell'aria esterna)
- $h_e = 65 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione esterno)
- $\lambda_v = 0.73 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività del vetro)
- $s_v = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m}$  (spessore del vetro)



– Determinare

- $T_{i,s}$  (temperatura sulla superficie interna del parabrezza)
- $T_{e,s}$  (temperatura sulla superficie esterna del parabrezza)

– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, effetti radiativi trascurabili.

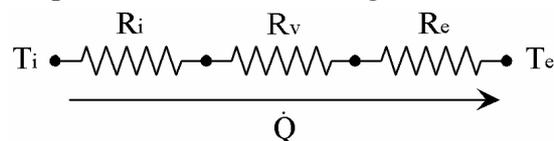
– Soluzione

Sebbene il parabrezza sia incurvato, la curvatura è sufficientemente piccola da poterlo considerare piano e, quindi, da poter assumere il problema mono-dimensionale.

Poiché non si hanno informazioni sull'area superficiale del parabrezza, si fa riferimento ad una superficie di area unitaria:

$$A = 1 \text{ m}^2$$

Il circuito termico relativo al problema studiato è il seguente:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.0333 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

$$R_v = \frac{s_v}{\lambda_v A} = 0.0055 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.0154 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno in aria, il vetro e lo strato convettivo superficiale esterno in aria.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da sinistra a destra) è regolata dalla relazione:

$$T_i - T_e = (R_i + R_v + R_e) \dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_v + R_e = 0.0542 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 830 \text{ W}$$

Le temperature superficiali possono essere calcolate considerando che la potenza termica trasmessa deve attraversare tutte le resistenze della serie. Si ha perciò che:

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 12.3^\circ\text{C}$$

$$T_{e,s} = T_e + R_e \dot{Q} = 7.8^\circ\text{C}$$

– Commenti

Il salto di temperatura più elevato rispetto al valore ambiente è sulla superficie interna. Tale salto può essere diminuito incrementando il coefficiente di convezione interno (per esempio, aumentando la velocità dell'aria), al fine di evitare che la temperatura superficiale scenda sotto la temperatura di rugiada e, quindi, che si abbia formazione di condensa sul parabrezza.

In alternativa, o ad integrazione, si può impiegare il climatizzatore per deumidificare l'aria all'interno dell'auto, cioè per ridurre l'umidità specifica e, quindi, innalzare la temperatura di rugiada.

**E.V. Potenza termica trasmessa attraverso una parete piana multi-strato (2)**

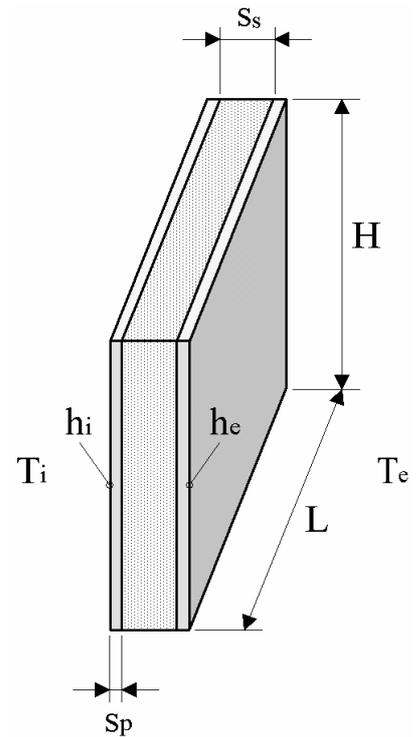
– Problema

Si consideri una parete piana multistrato di una cella frigorifera con base 2.00 m ed altezza 1.75 m, che separa dall'ambiente esterno, a temperatura 25°C, un vano refrigerato mantenuto stabilmente a temperatura -20°C. La parete piana è costituita da due "pelli" in materiale plastico rigido, ognuna delle quali presenta spessore 5 mm e conduttività termica 0.8 W/(m·°C); tra le due "pelli" è inserito uno strato di materiale schiumato con funzione di isolante termico, caratterizzato da spessore 100 mm e conduttività termica 0.030 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente, 10 W/(m<sup>2</sup>·°C) e 15 W/(m<sup>2</sup>·°C).

Determinare la potenza termica trasmessa.

- Dati e schema

- $T_i = -20^\circ\text{C}$  (temperatura del vano refrigerato)
- $h_i = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione interno)
- $T_e = 25^\circ\text{C}$  (temperatura dell'ambiente esterno)
- $h_e = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione esterno)
- $\lambda_p = 0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività delle "pelli" plastiche)
- $s_p = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$  (spessore delle "pelli" plastiche)
- $\lambda_s = 0.030 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività dello schiumato)
- $s_s = 100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$  (spessore dello schiumato)
- $L = 2.00 \text{ m}$  (lato di base della parete)
- $H = 1.75 \text{ m}$  (altezza della parete)



- Determinare

$\dot{Q}$  (potenza termica attraverso la parete)

- Ipotesi

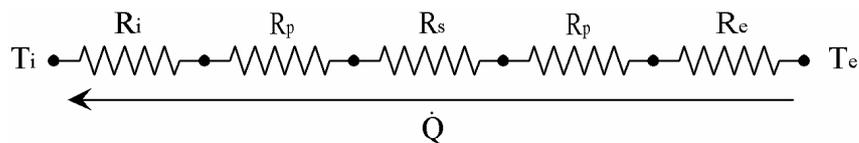
Problema stazionario, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale.

- Soluzione

L'area della sezione di passaggio del flusso di calore, costante, è pari a:

$$A = LH = 3.50 \text{ m}^2$$

Il circuito termico relativo al problema studiato si può rappresentare come segue:



in cui

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.02857 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_p = \frac{s_p}{\lambda_p A} = 0.00179 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_s = \frac{s_s}{\lambda_s A} = 0.95238 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.01905 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{W}$$

sono le resistenze alla trasmissione del calore attraverso, rispettivamente, lo strato convettivo superficiale interno, la pelle plastica interna (uguale alla pelle plastica esterna), lo strato di isolante schiumato e lo strato convettivo superficiale esterno.

La potenza termica trasferita dall'ambiente più caldo a quello più freddo (nello schema, da destra a sinistra) è regolata dalla relazione:

$$T_e - T_i = (R_i + R_p + R_s + R_p + R_e) \dot{Q}$$

Essendo poste in serie, le resistenze possono essere sostituite con un'unica resistenza equivalente, pari alla loro somma:

$$R = R_i + R_p + R_s + R_p + R_e = 1.00357 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Pertanto, la potenza termica trasferita tra ambiente esterno ed ambiente interno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 45 \text{ W}$$

– Commenti

La resistenza dello strato di materiale isolante è pari a circa il 95% della resistenza complessiva della parete.

**E.VI. Cella frigorifera**

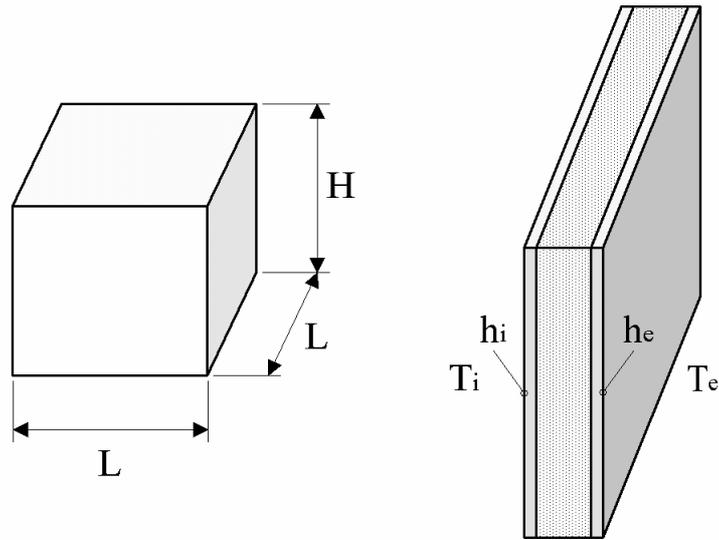
– Problema

Si consideri una cella frigorifera, con dimensioni esterne  $2.00 \times 2.00 \times 1.75 \text{ m}^3$  (L x L x H). Le pareti laterali e quella superiore sono tutte conformate, rispetto allo spessore, come la parete del problema precedente, ovvero sono costituite da due “pelli” in materiale plastico rigido, ognuna con spessore 5 mm e conduttività termica  $0.8 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ , tra le quali è inserito uno strato di isolante termico schiumato con spessore 100 mm e conduttività termica  $0.030 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ . I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente,  $10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$  e  $15 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$ . Il pavimento della cella si può considerare adiabatico.

Sapendo che l'ambiente esterno si trova a  $25^\circ\text{C}$ , determinare la potenza termica che è necessario estrarre dalla cella frigorifera per mantenere, in condizioni stazionarie, una temperatura interna pari a  $-20^\circ\text{C}$ .

– Dati e schema

$T_i = -20^\circ\text{C}$	(temperatura del vano refrigerato)
$h_i = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$	(coefficiente di convezione interno)
$T_e = 25^\circ\text{C}$	(temperatura dell'ambiente esterno)
$h_e = 15 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$	(coefficiente di convezione esterno)
$\lambda_p = 0.8 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	(conduttività delle “pelli” plastiche)
$s_p = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$	(spessore delle “pelli” plastiche)
$\lambda_s = 0.030 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	(conduttività dello schiumato)
$s_s = 100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$	(spessore dello schiumato)
$L = 2.00 \text{ m}$	(lato di base esterno della cella)
$H = 1.75 \text{ m}$	(altezza esterna della cella)



– Determinare

$\dot{Q}$  (potenza termica attraverso le pareti)

– Ipotesi

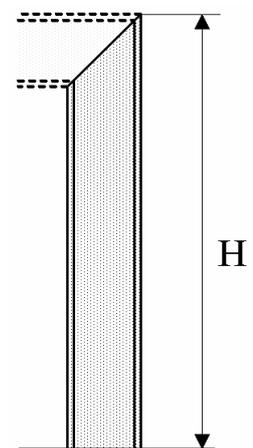
Problema stazionario, pareti identiche nella direzione dello spessore, pavimento termicamente isolato, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti, effetti di bordo trascurabili.

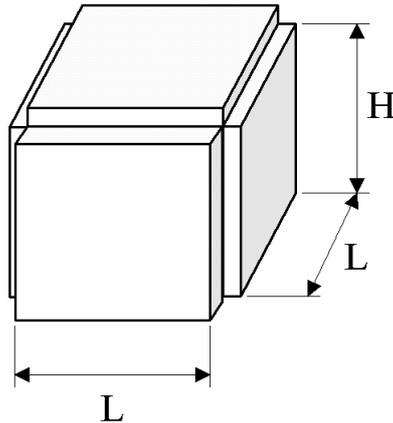
– Soluzione

Se si osserva in sezione una qualunque delle pareti della cella, si può chiaramente vedere che questa non presenta in realtà una sezione di passaggio del calore uniforme rispetto allo spessore. Il problema della trasmissione del calore è quindi multi-dimensionale. Ci si può tuttavia ricondurre al caso mono-dimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore.

In prima istanza, l'area di riferimento si potrebbe assumere pari all'area media della sezione di passaggio del calore, ovvero all'area della sezione di passaggio in corrispondenza della metà dello spessore. Tuttavia, prendendo a riferimento l'area della superficie esterna, si ottiene un valore più basso della resistenza alla trasmissione del calore delle pareti (che, nel caso di un problema di isolamento termico, si vorrebbe massimizzare), motivo per cui si opera in favore di sicurezza.

Utilizzando l'approccio sopra descritto, il problema si può schematizzare come segue:



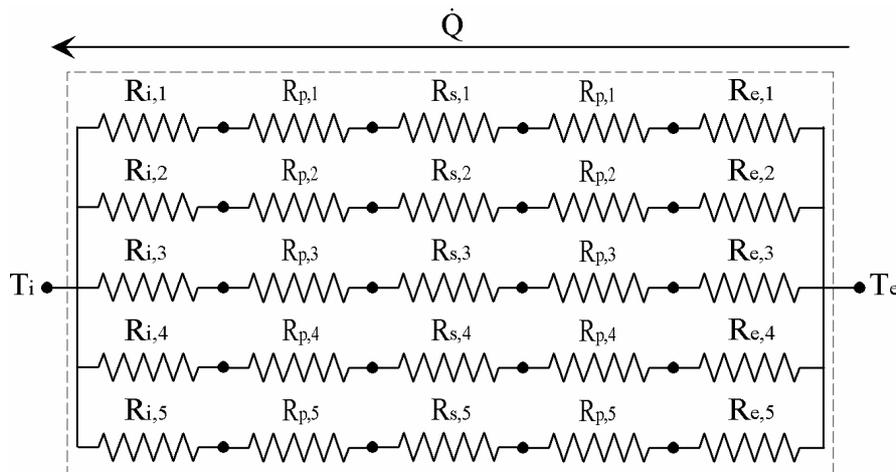


Etichettando con  $n = 1,2,3,4$  le quattro pareti verticali e con  $n = 5$  la parete orizzontale superiore (il pavimento è adiabatico per ipotesi), l'area della sezione di passaggio del flusso di calore è per ogni parete pari a:

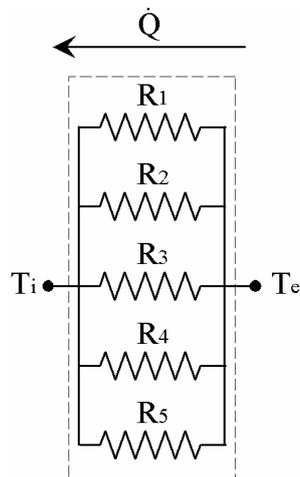
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = LH$$

$$A_5 = L^2$$

Se si trascurano gli effetti di bordo, dal punto di vista della trasmissione del calore ogni parete "lavora" in parallelo con le altre. Il circuito termico relativo al problema allo studio si può quindi rappresentare come segue:



Considerando le resistenze equivalenti (totali) dei cinque rami in parallelo, ognuno relativo ad una singola parete, lo schema precedente si può semplificare come segue:



La resistenza della n-esima parete ( $n = 1,2,3,4,5$ ) è data dalla somma delle resistenze nel circuito in serie relativo alla parete medesima:

$$R_n = R_{i,n} + R_{p,n} + R_{s,n} + R_{p,n} + R_{e,n} = \frac{1}{h_i A_n} + \frac{s_p}{\lambda_p A_n} + \frac{s_s}{\lambda_s A_n} + \frac{s_p}{\lambda_p A_n} + \frac{1}{h_e A_n}$$

Raccogliendo  $A_n$ , si ottiene:

$$R_n = \frac{1}{A_n} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right)$$

Considerando ora il circuito in parallelo costituito dall'insieme dei cinque rami, ognuno caratterizzato da resistenza  $R_n$  ( $n = 1,2,3,4,5$ ), si ha che la resistenza equivalente totale del circuito,  $R$ , è tale che:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{R_n} = \sum_{n=1}^5 \frac{A_n}{\left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right)}$$

In virtù del fatto che le pareti sono identiche tra loro rispetto allo spessore, il termine tra parentesi tonde è uguale per ogni termine della sommatoria e può perciò essere portato fuori della stessa:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right)} \sum_{n=1}^5 A_n$$

Il risultato della sommatoria altro non è che l'area totale della superficie esterna della cella frigorifera:

$$A = \sum_{n=1}^5 A_n = 4 \cdot (LH) + L^2 = 18 \text{ m}^2$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{R} = \frac{A}{\left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right)} \equiv \frac{1}{\frac{1}{A} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right)}$$

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di convezione) è uguale alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. Nel caso allo studio, se ne ricava:

$$R = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right) \equiv \left( \frac{1}{h_i A} + \frac{s_p}{\lambda_p A} + \frac{s_s}{\lambda_s A} + \frac{s_p}{\lambda_p A} + \frac{1}{h_e A} \right) = 0.19514 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In conclusione, la potenza termica trasferita tra ambiente esterno ed ambiente interno, che deve essere continuamente estratta dalla cella frigorifera per mantenere all'interno di questa una temperatura stabilmente pari al valore desiderato, vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 231 \text{ W}$$

– *Commenti*

Lungo gli spigoli della cella avvengono fenomeni di conduzione multi-dimensionale che, a parità di spessore, comportano maggiori perdite di calore che nel resto delle pareti. Tuttavia, nei casi di isolamento termico, il considerare nei calcoli l'area delle superfici esterne va generalmente a compensare tali fenomeni.

Ovviamente, se le specifiche di progetto individuano un ben preciso volume interno della cella, le dimensioni e le aree superficiali esterne di questa vanno calcolate di conseguenza. Ad esempio, nel caso studiato precedentemente, se fossero prescritte le dimensioni interne del vano refrigerato,  $L_i \times L_i \times H_i$ , nonché lo spessore totale delle pareti,  $s$  (da specifiche o calcolato sulla base di una potenza trasmessa massima ammissibile), le dimensioni esterne della cella frigorifera vanno valutate mediante le (ovvie) relazioni:

$$L_e = L_i + 2 \cdot s$$

$$H_e = H_i + s$$

Assumere la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano pari alla resistenza di una singola parete avente area della sezione di passaggio del calore uguale alla somma delle aree delle sezioni di passaggio dell'insieme è possibile se, e solo se, tali pareti presentano caratteristiche identiche (o, quantomeno, assai simili) rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali, in termini di materiali, spessori e coefficienti di convezione.

L'ipotesi di pavimento isolato va in generale usata con una certa cautela, poiché possono verificarsi attraverso di esso flussi di calore non sempre trascurabili.

Nella pratica, non si può dimensionare il gruppo di refrigerazione (generalmente, a compressore) solo in base alla potenza termica trasferita in condizioni stazionarie, ma occorre anche valutare i carichi termici transitori, ad esempio legati all'introduzione di generi deperibili, la cui temperatura debba essere portata entro un periodo di tempo prestabilito dal valore ambiente a quello nel vano refrigerato, nonché il decadimento nel tempo delle prestazioni del gruppo di refrigerazione e dei materiali isolanti.

## E.VII. Cella frigorifera con finestra di ispezione

– *Problema*

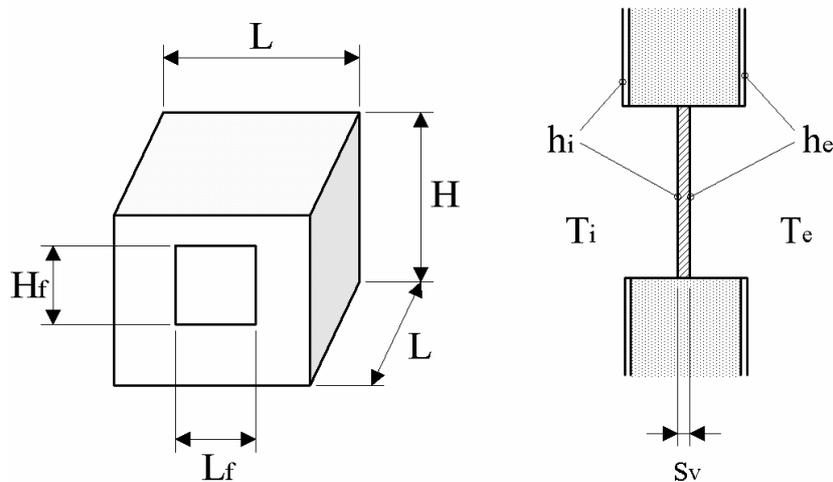
Si consideri la cella frigorifera del problema precedente, caratterizzata da dimensioni esterne  $2.00 \times 2.00 \times 1.75 \text{ m}^3$  ( $L \times L \times H$ ). Le pareti laterali e quella superiore sono tutte costituite da due "pelli" in materiale plastico rigido, ognuna con spessore 5 mm e conduttività termica  $0.8 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$ , tra le quali è inserito uno strato di isolante termico schiumato con spessore 100 mm e conduttività termica  $0.030 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$ . I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente,  $10 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$  e  $15 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$ . Il pavimento della cella si può considerare adiabatico.

Sia inserita in una delle pareti verticali una finestra di ispezione con dimensioni  $750 \text{ mm} \times 750 \text{ mm}$ , costituita da una lastra di vetro con spessore 5 mm e conduttività termica pari a  $1 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$ . I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna del vetro si possono assumere uguali a quelli esistenti sulle superfici interna ed esterna delle pareti isolanti.

Determinare la potenza termica che si deve estrarre dalla cella frigorifera per mantenere, in condizioni stazionarie, la temperatura interna desiderata, nonché quale percentuale di tale potenza fluisce attraverso la finestra di ispezione. Determinare inoltre le temperature superficiali sul vetro e sulle pelli plastiche.

– Dati e schema

- $T_i = -20^\circ\text{C}$  (temperatura del vano refrigerato)
- $h_i = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione interno)
- $T_e = 25^\circ\text{C}$  (temperatura dell'ambiente esterno)
- $h_e = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione esterno)
- $\lambda_p = 0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività delle "pelli" plastiche)
- $s_p = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$  (spessore delle "pelli" plastiche)
- $\lambda_s = 0.030 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività dello schiumato)
- $s_s = 100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$  (spessore dello schiumato)
- $L = 2.00 \text{ m}$  (lato di base esterno della cella)
- $H = 1.75 \text{ m}$  (altezza esterna della cella)
- $\lambda_v = 1 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività del vetro)
- $s_v = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$  (spessore del vetro)
- $L_f = 750 \text{ mm} = 0.750 \text{ m}$  (lato di base della finestra)
- $H_f = 750 \text{ mm} = 0.750 \text{ m}$  (altezza della finestra)



– Determinare

- $\dot{Q}$  (potenza termica totale attraverso pareti e finestra)
- $\dot{Q}_f / \dot{Q}$  (frazione della potenza termica trasmessa attraverso la finestra)
- $T_{i,s,t}, T_{e,s,t}$  (temperatura superficiale interna e esterna sulle pelli)
- $T_{i,s,f}, T_{e,s,f}$  (temperatura superficiale interna e esterna sul vetro)

– Ipotesi

Problema stazionario, pareti identiche rispetto allo spessore (eccettuata la finestra di ispezione), pavimento termicamente isolato, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti e sulle superfici del vetro, effetti di bordo trascurabili.

– *Soluzione*

Come già visto in precedenza, si può assumere che la resistenza equivalente delle pareti che delimitano il vano refrigerato sia pari alla resistenza di una singola parete con area della sezione di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti suddette, in virtù del fatto che queste presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali, in termini di materiali, spessori e coefficienti di convezione. Ovviamente, dal computo dell'area superficiale totale va sottratta l'area superficiale della finestra, pari a:

$$A_f = L_f H_f = 0.5635 \text{ m}^2$$

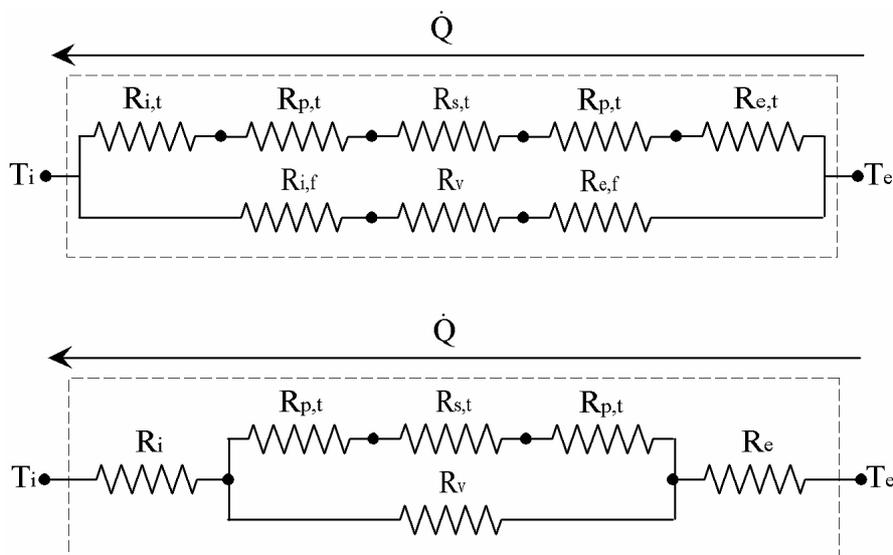
L'area totale netta delle pareti isolanti, calcolata sulle dimensioni esterne della cella per compensare gli effetti di bordo, vale quindi:

$$A_t = 4 \cdot (LH) + L^2 - A_f = 17.4375 \text{ m}^2$$

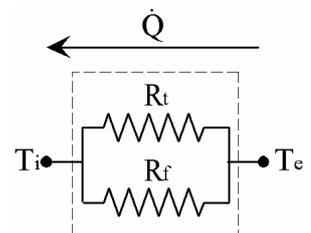
Si noti che la superficie della finestra rappresenta una frazione piccola della superficie totale:

$$A_f / A = 3.13 \%$$

Dal punto di vista della trasmissione del calore, la finestra e l'insieme delle pareti "lavorano" in parallelo. Al sistema corrispondono due possibili circuiti termici equivalenti:



Nel primo caso, si considerano adiabatiche le superfici di separazione tra finestra e pareti isolanti, annullando quindi i relativi flussi trasversali. Nel secondo caso, si considerano isoterme le superfici esterne lambite dall'aria, assumendo temperature superficiali identiche per le pelli plastiche ed il vetro. La scelta dipende da quale dei due casi si può ritenere più vicino alla situazione reale (che, in realtà, costituisce una via di mezzo tra i due, essendo interessata da flussi termici che solo in prima approssimazione possono essere considerati mono-dimensionali).



In generale, nei casi di isolamento termico, le due schematizzazioni restituiscono risultati confrontabili qualora non si abbiano grosse difformità delle proprietà termofisiche e degli spessori tra i diversi rami resistivi. Si può quindi preferire la prima, che comporta trattazioni matematiche più agevoli. Infatti, si vede immediatamente che il circuito termico può essere semplificato sostituendo ad ogni serie di resistenze una resistenza equivalente, pari alla somma delle resistenze in serie:

$$R_t = R_{i,t} + R_{p,t} + R_{s,t} + R_{p,t} + R_{e,t} = \frac{1}{A_t} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right) = 0.20143 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_f = R_{i,f} + R_v + R_{e,f} = \frac{1}{A_f} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_v}{\lambda_v} + \frac{1}{h_e} \right) = 0.30519 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza equivalente al parallelo di  $R_t$  e  $R_p$  è poi tale che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_f} \Rightarrow R = \frac{R_t R_f}{R_t + R_f} = 0.12134 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasmessa complessivamente attraverso le pareti isolate termicamente e la finestra vale:

$$\dot{Q} = (T_e - T_i)/R = 371 \text{ W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso la sola finestra vale invece:

$$\dot{Q}_f = (T_e - T_i)/R_f = 147 \text{ W}$$

Si noti come, a fronte di un'estensione superficiale pari a poco più del 3% del totale, la finestra trasmetta quasi il 40% della potenza termica complessiva.

$$\dot{Q}_f / \dot{Q} = 39.8\%$$

Infine, la schematizzazione impiegata permette di stimare agevolmente le temperature superficiali

Per la finestra si ha:

$$R_{i,f} = \frac{1}{h_i A_f} = 0.17778 \text{ } ^\circ\text{C/W} \quad R_{e,f} = \frac{1}{h_e A_f} = 0.11852 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$T_{i,s,f} = T_i + R_{i,f} \dot{Q}_f = 6.2^\circ\text{C} \quad T_{e,s,f} = T_e - R_{e,f} \dot{Q}_f = 7.5^\circ\text{C}$$

Per le pareti multistrato si ha:

$$\dot{Q}_t = (T_e - T_i)/R_t \equiv \dot{Q} - \dot{Q}_f = 223 \text{ W}$$

$$R_{i,t} = \frac{1}{h_i A_t} = 0.00573 \text{ } ^\circ\text{C/W} \quad R_{e,t} = \frac{1}{h_e A_t} = -0.00384 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$T_{i,s,t} = T_i + R_{i,t} \dot{Q}_t = -18.7^\circ\text{C} \quad T_{e,s,t} = T_e - R_{e,t} \dot{Q}_t = 24.1^\circ\text{C}$$

– Commenti

L'impiego della seconda schematizzazione, in cui si assumono isoterme le superfici lambite dall'aria (con temperature superficiali uguali per le pelli plastiche ed il vetro), restituirebbe un valore della potenza termica complessiva trasmessa pari a 2535 W, quindi assai più elevato di quello stimato precedentemente di 371 W. Entrambi i valori non sono comunque attendibili e quello corretto sta probabilmente nel mezzo. Il caso analizzato è in ogni modo un caso limite, che rappresenta un esempio di cattiva progettazione.

Si sono trascurati i fenomeni di conduzione indotti dalla (necessaria) presenza di un telaio della finestra e di una cornice di contenimento dello schiumato (con proprietà termiche tipicamente simili a quelle delle pelli plastiche) tutto intorno all'incasso della finestra. Inoltre, la cella frigorifera deve possedere una porta di accesso, che, sebbene possa essere conformata come le pareti coibenti, presenterà comunque una cornice di contenimento ed un telaio di incasso, che comporteranno la presenza di ulteriori ponti termici. Tali ponti termici sono

tuttavia piccoli se non si impiegano materiali metallici o spessori consistenti delle pelli di rivestimento.

### E.VIII. Cella frigorifera con finestra di ispezione a doppio vetro

– Problema

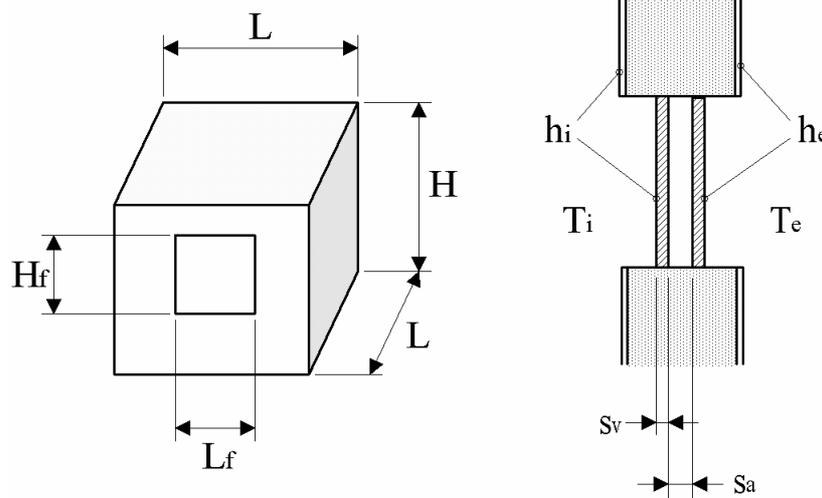
Si consideri la cella frigorifera del problema precedente, caratterizzata da dimensioni esterne  $2.00 \times 2.00 \times 1.75 \text{ m}^3$  (L x L x H). Le pareti laterali e quella superiore sono tutte costituite da due “pelli” in materiale plastico rigido, ognuna con spessore 5 mm e conduttività termica  $0.8 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ , tra le quali è inserito uno strato di isolante termico schiumato con spessore 100 mm e conduttività termica  $0.030 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ . I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna della parete valgono, rispettivamente,  $10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$  e  $15 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$ . Il pavimento della cella si può considerare adiabatico.

Questa volta è inserita, in una delle pareti verticali, una finestra di ispezione con dimensioni  $750 \text{ mm} \times 750 \text{ mm}$ , costituita da due lastre di vetro con spessore 5 mm e conduttività termica pari a  $1 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ , tra le quali è interposto uno strato di aria ferma con spessore 20 mm e conduttività termica  $0.025 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ .

Determinare la potenza termica che è necessario estrarre dalla cella frigorifera per mantenere, in condizioni stazionarie, la temperatura interna desiderata e quale percentuale di tale potenza fluisce attraverso la finestra di ispezione. Determinare inoltre le temperature superficiali sulle superfici esposte all’aria.

– Dati e schema

$T_i = -20^\circ\text{C}$	(temperatura del vano refrigerato)
$h_i = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$	(coefficiente di convezione interno)
$T_e = 25^\circ\text{C}$	(temperatura dell’ambiente esterno)
$h_e = 15 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$	(coefficiente di convezione esterno)
$\lambda_p = 0.8 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	(conduttività delle “pelli” plastiche)
$s_p = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$	(spessore delle “pelli” plastiche)
$\lambda_s = 0.030 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	(conduttività dello schiumato)
$s_s = 100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$	(spessore dello schiumato)
$L = 2.00 \text{ m}$	(lato di base esterno della cella)
$H = 1.75 \text{ m}$	(altezza esterna della cella)



- $\lambda_v = 1 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività del vetro)
- $s_v = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$  (spessore delle lastre di vetro)
- $\lambda_a = 0.025 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività dell'aria)
- $s_a = 20 \text{ mm} = 0.020 \text{ m}$  (spessore dello strato d'aria)
- $L_f = 750 \text{ mm} = 0.750 \text{ m}$  (lato di base della finestra)
- $H_f = 750 \text{ mm} = 0.750 \text{ m}$  (altezza della finestra)

– Determinare

- $\dot{Q}$  (potenza termica totale attraverso pareti e finestra)
- $\dot{Q}_f / \dot{Q}$  (frazione della potenza termica attraverso la finestra)
- $T_{i,s,t}, T_{e,s,t}$  (temperatura superficiale interna e esterna sulle pareti)
- $T_{i,s,f}, T_{e,s,f}$  (temperatura superficiale interna e esterna sul vetro)

– Ipotesi

Problema stazionario, pareti identiche rispetto allo spessore (eccettuata la finestra di ispezione), pavimento termicamente isolato, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti e sulle superfici del vetro, effetti di bordo trascurabili, aria ferma tra le lastre di vetro, superfici di separazione tra finestra e pareti adiabatiche.

– Soluzione

Ancora una volta si può assumere che la resistenza equivalente delle pareti che delimitano il vano refrigerato sia pari alla resistenza di una singola parete con area della sezione di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti suddette, sottraendo dal computo l'area superficiale della finestra, pari a:

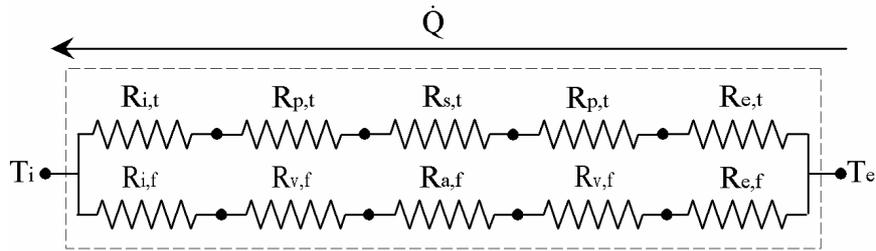
$$A_f = L_f H_f = 0.5635 \text{ m}^2$$

L'area totale netta delle pareti coibenti, ancora una volta calcolata sulle dimensioni esterne della cella per compensare gli effetti di bordo, vale quindi:

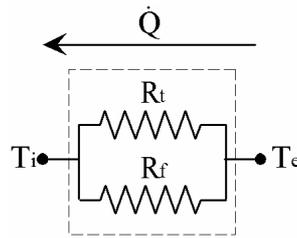
$$A_t = 4 \cdot (LH) + L^2 - A_f = 17.4375 \text{ m}^2$$

Dal punto di vista della trasmissione del calore, la finestra e l'insieme delle pareti "lavorano" in parallelo. Se si considerano adiabatiche le superfici di separazione tra finestra e pareti

isolanti, annullando quindi i relativi flussi trasversali, al sistema corrisponde il seguente circuito termico equivalente:



Il circuito termico può essere poi semplificato sostituendo ad ogni serie di resistenze una resistenza equivalente alla loro somma:



$$R_t = R_{i,t} + R_{p,t} + R_{s,t} + R_{p,t} + R_{e,t} = \frac{1}{A_t} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{s_s}{\lambda_s} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right) = 0.20143 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_f = R_{i,f} + R_{v,f} + R_{a,f} + R_{v,f} + R_{e,f} = \frac{1}{A_f} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_v}{\lambda_v} + \frac{s_a}{\lambda_a} + \frac{s_v}{\lambda_v} + \frac{1}{h_e} \right) = 1.73630 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza equivalente al parallelo di  $R_t$  e  $R_f$  è tale che:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_f} \Rightarrow R = \frac{R_t R_f}{R_t + R_f} = 0.18049 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasmessa complessivamente attraverso le pareti coibenti e la finestra vale:

$$\dot{Q} = (T_e - T_i) / R = 249 \text{ W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso la finestra vale:

$$\dot{Q}_f = (T_e - T_i) / R_f = 26 \text{ W}$$

Si noti come, impiegando un doppio vetro, la finestra trasmette ora solo il 10% circa della potenza termica complessiva.

$$\dot{Q}_f / \dot{Q} = 10.4\%$$

Infine, si possono stimare le temperature sulle superfici esposte. Per la finestra si ha:

$$R_{i,f} = \frac{1}{h_i A_f} = 0.17778 \text{ } ^\circ\text{C/W} \quad R_{e,f} = \frac{1}{h_e A_f} = 0.11852 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$T_{i,s,f} = T_i + R_{i,f} \dot{Q}_f = -15.4^\circ\text{C} \quad T_{e,s,f} = T_e - R_{e,f} \dot{Q}_f = 21.9^\circ\text{C}$$

Per le pareti termicamente isolate si ha:

$$\dot{Q}_t = (T_e - T_i) / R_t = 223 \text{ W}$$

$$R_{i,t} = \frac{1}{h_i A_t} = 0.00573 \text{ } ^\circ\text{C/W} \quad R_{e,t} = \frac{1}{h_e A_t} = -0.00384 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$T_{i,s,t} = T_i + R_{i,t} \dot{Q}_t = -18.7^\circ\text{C} \quad T_{e,s,t} = T_e - R_{e,t} \dot{Q}_t = 24.1^\circ\text{C}$$

– Commenti

L'impiego della schematizzazione in cui si assumono isoterme le superfici lambite dall'aria (con temperature superficiali esterne uguali per le pelli plastiche ed il vetro) restituirebbe in questo caso un valore della potenza termica complessiva trasmessa pari a 252 W, quindi molto prossimo a quello precedentemente stimato di 249 W.

Non è possibile allargare a piacere lo strato di aria poiché, oltre un certo spessore di questo, si instaurano nella cavità tra le due lastre di vetro moti turbolenti per convezione naturale, con il risultato di aumentare la trasmissione del calore anziché diminuirla. Inoltre, lo scambio termico per irraggiamento tra le due lastre di vetro è indipendente dallo spessore.

**E.IX. Scelta di un materiale refrattario**

– Problema

Si consideri un fornello il cui vano interno presenta dimensioni 600 mm x 400 mm x 500 mm ( $L_{1,int} \times L_{2,int} \times H_{int}$ ). Le pareti sono costituite da lastre in materiale refrattario, con spessore 120 mm e conduttività termica media 0.5 W/(m·°C), protette esternamente da lamine di acciaio inossidabile con spessore 5 mm e conduttività termica 16 W/(m·°C). I coefficienti di scambio termico convettivo sulla superficie interna e sulla superficie esterna delle pareti valgono, rispettivamente, 20 W/(m<sup>2</sup>·°C) e 10 W/(m<sup>2</sup>·°C).

Sapendo che l'ambiente esterno si trova a 30°C, determinare la potenza termica da fornire al vano interno del fornello per mantenere, in condizioni stazionarie, una temperatura interna pari a 400°C. Determinare inoltre la conduttività termica che dovrebbe possedere un materiale refrattario alternativo a quello impiegato, atto a ridurre del 75% le dispersioni di calore, lasciando invariate la geometria e le altre caratteristiche del forno.

– Dati

- $T_i = 400^\circ\text{C}$  (temperatura del vano interno)
- $T_e = 30^\circ\text{C}$  (temperatura dell'ambiente esterno)
- $h_i = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione interno)
- $h_e = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione esterno)
- $\lambda_r = 0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività termica del refrattario)
- $s_r = 120 \text{ mm} = 0.120 \text{ m}$  (spessore del refrattario)
- $\lambda_m = 16 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività termica dell'acciaio)
- $s_s = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$  (spessore dell'acciaio)
- $L_{1,int} = 600 \text{ mm} = 0.600 \text{ m}$  (lato di base del vano interno)
- $L_{2,int} = 400 \text{ mm} = 0.400 \text{ m}$  (lato di base del vano interno)
- $H_{int} = 500 \text{ mm} = 0.500 \text{ m}$  (altezza del vano interno)

– Determinare

- $\dot{Q}$  (potenza termica attraverso le pareti)
- $\lambda_r$  (conduttività di un refrattario alternativo)

– Ipotesi

Problema stazionario, pareti identiche nella direzione dello spessore, proprietà dei materiali omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti, effetti di bordo trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– Soluzione

Il problema può essere reso monodimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore. Per operare in favore di sicurezza, tale area si può scegliere pari all'estensione superficiale esterna della parete considerata.

Per calcolare le aree superficiali esterne è necessario determinare le dimensioni esterne del forno, che sono pari a:

$$L_1 \equiv L_{1,est} = L_{1,int} + 2 \cdot s_r + 2 \cdot s_m = 0.850 \text{ m}$$

$$L_2 \equiv L_{2,est} = L_{2,int} + 2 \cdot s_r + 2 \cdot s_m = 0.650 \text{ m}$$

$$H \equiv H_{est} = H_{int} + 2 \cdot s_r + 2 \cdot s_m = 0.750 \text{ m}$$

Etichettando con  $n = 1,2,3,4$  le quattro pareti verticali e con  $n = 5,6$  le pareti orizzontale superiore e inferiore (il pavimento non si può considerare a priori adiabatico, se non si hanno informazioni in tal senso), l'area superficiale esterna per le varie pareti è pari a:

$$A_1 = A_3 = L_1 H$$

$$A_2 = A_4 = L_2 H$$

$$A_5 = A_6 = L_1 L_2$$

Si è già visto che, essendo le sei pareti del fornello caratterizzate da identici materiali, spessori e coefficienti di convezione, la loro resistenza complessiva alla trasmissione del calore è pari alla resistenza di una singola parete avente area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle sei pareti suddette. Si ha quindi che:

$$A = \sum_{n=1}^6 A_n = 2 \cdot (L_1 H) + 2 \cdot (L_2 H) + 2 \cdot (L_1 L_2) = 3.355 \text{ m}^2$$

$$R_i = \frac{1}{h_i A} = 0.0149 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_r = \frac{s_r}{\lambda_r A} = 0.0715 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_m = \frac{s_m}{\lambda_m A} = 0.000093 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A} = 0.0298 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R = R_i + R_r + R_m + R_e = 0.1163 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasferita tra ambiente interno ed ambiente esterno, da fornire al fornello (ad esempio, mediante una resistenza elettrica o un bruciatore a gas) per stabilizzare la sua temperatura interna al valore desiderato, vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 3180 \text{ W} = 3.2 \text{ kW}$$

Ridurre la potenza termica dissipata del 75% significa in pratica ridurla ad un quarto del valore precedentemente calcolato:

$$\dot{Q}' = (1 - 0.75) \cdot \dot{Q} = 0.25 \cdot \dot{Q} = 795 \text{ W}$$

Volendo lasciare la geometria del fornetto e, quindi, gli spessori di parete invariati, e non potendo intervenire sui coefficienti di scambio termico convettivo, l'unico modo per aumentare la resistenza alla trasmissione del calore delle pareti è quello di impiegare un diverso tipo di refrattario. Questo deve essere selezionato in base alla conduttività termica, che deve presentare valore tale che:

$$R' = \frac{T_i - T_e}{\dot{Q}'}$$

ovvero

$$R_{r'} = \frac{T_i - T_e}{\dot{Q}'} - R_i - R_m - R_e = 0.4205 \text{ °C/W}$$

In definitiva, la conduttività del nuovo refrattario deve essere pari a:

$$\lambda_{r'} = \frac{s_r}{A R_{r'}} = 0.085 \text{ W/m°C}$$

– Commenti

Si noti che la resistenza alla conduzione termica del rivestimento metallico è così piccola che, in prima approssimazione, poteva essere trascurata.

Il refrattario utilizzato deve presentare caratteristiche compatibili con l'applicazione allo studio, con particolare riferimento alla resistenza alle alte temperature, alle proprietà meccaniche, al coefficiente di dilatazione termica, ecc.

**E.X. Raffreddamento di un microprocessore**

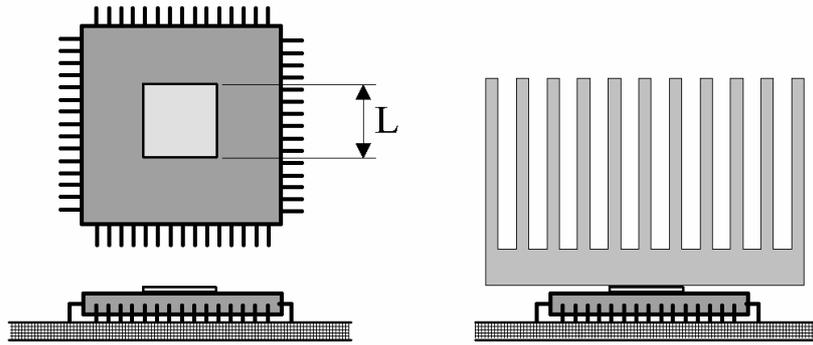
– Problema

Si consideri un microprocessore che, in condizioni di massimo carico computazionale, dissipa una potenza termica pari a 80 W. La superficie attraverso cui deve essere dissipato il calore presenta dimensioni 8 mm x 8 mm. La temperatura dell'ambiente in cui il calore deve essere rilasciato è pari a 35°C.

Determinare la resistenza termica che deve presentare un dissipatore di calore (ad esempio, una superficie alettata in rame o alluminio con una ventola di raffreddamento) per far sì che la massima temperatura di funzionamento del microprocessore, pari a 75°C, non venga mai raggiunta.

– Dati e schema

- $\dot{Q}_{\max} = 80 \text{ W}$  (massima potenza dissipata dal microprocessore)
- $L = 8 \text{ mm} = 0.0008 \text{ m}$  (lato di base della superficie di scambio termico)
- $T_a = 35^\circ\text{C}$  (temperatura ambiente)
- $T_{\max} = 75^\circ\text{C}$  (massima temperatura ammessa nel microprocessore)



– Determinare

$R_d$  (resistenza del dissipatore)

– Ipotesi

Problema stazionario, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, resistenze alla conduzione all'interno del microprocessore trascurabili, resistenze di contatto trascurabili, superficie inferiore del microprocessore termicamente isolata.

– Soluzione

La potenza termica da dissipare sembra, a prima vista, limitata. In realtà, il flusso termico ad essa associato è elevatissimo a causa della ridotta superficie di scambio del microprocessore. Si ha infatti che:

$$A = L^2 = 64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$q'' = \dot{Q}/A = 1250000 \text{ W/m}^2 = 1.25 \text{ MW/m}^2$$

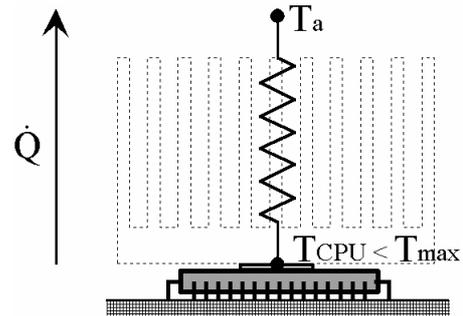
Il circuito termico relativo al problema in esame è riportato accanto.

La resistenza termica complessiva del dissipatore da applicare sopra il processore deve essere tale che

$$T_{\text{CPU}} \leq T_{\text{max}} \Rightarrow (T_{\text{CPU}} - T_a) = R_d \dot{Q}_{\text{max}} \leq (T_{\text{max}} - T_a)$$

e, quindi,

$$R_d \leq \frac{T_{\text{max}} - T_a}{\dot{Q}_{\text{max}}} = 0.50 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$



– Commenti

La resistenza termica complessiva di un dissipatore termico a superficie alettata con ventola, data dalla somma delle resistenze alla conduzione nel metallo e delle resistenze convettive, è tipicamente un dato fornito dal produttore del dissipatore.

La parte termicamente attiva del microprocessore, vale a dire la circuiteria elettronica incisa su chip di silicio, è in contatto pressoché diretto con il dissipatore (li separa un sottilissimo strato in materiale ceramico o cristallino per isolamento elettrico, caratterizzato da conduttività termica elevatissima e resistenza alla trasmissione del calore pressoché nulla). Peraltro, la suddetta parte termicamente attiva del microprocessore scambia calore con l'ambiente esterno non solo tramite il dissipatore, ma anche attraverso il fondo del

microprocessore e la scheda su cui questo è montato. Il circuito termico equivalente dovrebbe perciò comprendere un secondo ramo di resistenze ( $R_2$ ), termicamente in parallelo con il primo ( $R_1$ ), con percorso che si svilupperebbe dalla parte attiva suddetta all'ambiente esterno, attraversando il basamento del microprocessore, lo strato d'aria tra questo e la scheda, la scheda stessa e lo strato convettivo in aria tra scheda e ambiente. Tuttavia la riduzione della resistenza termica totale data dalla presenza di tale ramo è, ai fini della dissipazione del calore, trascurabile. Si può infatti verificare che:

$$R_2 \gg R_1 \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cong \frac{R_1 R_2}{R_2} = R_1$$

La potenza termica dissipata nella circuiteria elettronica del processore è facilmente stimabile mediante valutazioni di ordine elettrico:

$$\dot{Q} \cong VI$$

### E.XI. Raffreddamento di un microprocessore: resistenza di contatto

#### – Problema

Si considerino il microprocessore ed il dissipatore termico di cui al problema precedente. Il primo presenta superficie di dissipazione del calore con dimensioni 8 mm x 8 mm e dissipa, in condizioni di massimo carico, una potenza termica pari a 80 W. Per il dissipatore, il fabbricante dichiara una resistenza termica pari a 0.5 °C/W. La temperatura dell'ambiente in cui il calore deve essere rilasciato è pari a 35°C.

In questo caso, si tiene in considerazione l'esistenza di una resistenza termica di interfaccia in corrispondenza della superficie di contatto tra microprocessore e base della superficie alettata. Sia pari a 0.00006 °C·m<sup>2</sup>/W, riferito all'unità di superficie, il valore specifico di tale resistenza (tipico dell'accoppiamento silicio/alluminio con ridotta pressione di contatto). Determinare la massima temperatura che si potrebbe raggiungere nel microprocessore.

#### – Dati

- $\dot{Q}_{\max} = 80 \text{ W}$  (massima potenza dissipata dal microprocessore)
- $A = 64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$  (superficie di scambio del microprocessore)
- $T_a = 35^\circ\text{C}$  (temperatura ambiente)
- $R_d = 0.5 \text{ }^\circ\text{C/W}$  (resistenza del dissipatore)
- $R_c'' = 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2/\text{W}$  (resistenza superficiale di contatto)

#### – Determinare

- $T_{\text{CPU}}$  (massima temperatura del microprocessore)

#### – Ipotesi

Problema stazionario, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, resistenze alla conduzione all'interno del microprocessore trascurabili, superficie inferiore del microprocessore termicamente isolata.

– *Soluzione*

Nel circuito termico relativo al problema in esame, rappresentato nella figura accanto, la resistenza termica di contatto si può valutare come segue:

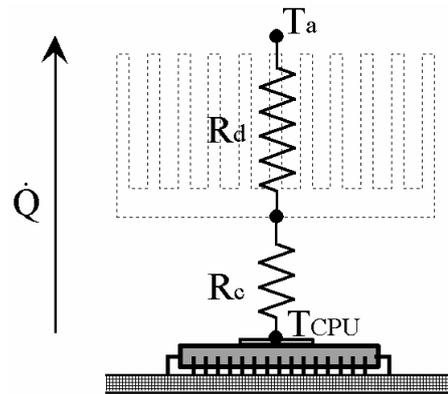
$$R_c = R_c''/A = 0.94 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza termica complessiva tra superficie di dissipazione del processore e ambiente vale:

$$R = R_c + R_d = 1.44 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La massima temperatura che si può raggiungere nel microprocessore è quindi pari a:

$$T_{\text{CPU}} = T_a + R\dot{Q}_{\text{max}} = 150 \text{ } ^\circ\text{C}$$

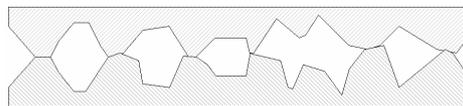


– *Commenti*

Il valore ottenuto eccede largamente le specifiche ( $T_{\text{max}} = 75^\circ\text{C}$ ). Va peraltro osservato che a nulla varrebbe l'impiego di un dissipatore più efficiente, al limite caratterizzato da resistenza termica praticamente trascurabile (cosa tecnicamente possibile solo adottando un sistema a liquido). Si otterrebbe infatti che:

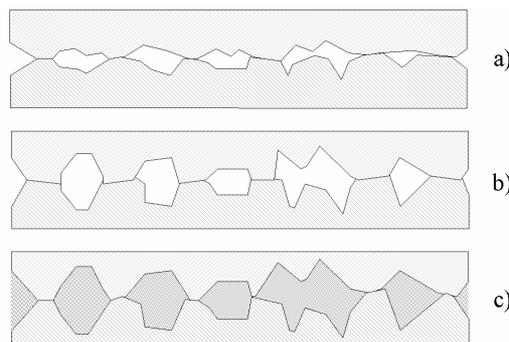
$$T_{\text{CPU}} = T_a + R\dot{Q}_{\text{max}} \approx T_a + R_d\dot{Q}_{\text{max}} = 110 \text{ } ^\circ\text{C}$$

È perciò necessario intervenire sulla resistenza di contatto. Tale resistenza è dovuta al fatto che, a livello microscopico, l'effettiva superficie di scambio termico tra microprocessore e dissipatore non è pari al valore nominale, ma all'area di contatto tra le sommità delle microasperità superficiali. Altrove, sono interposte tra microprocessore e dissipatore microscopiche cavità riempite d'aria, che è assai poco conduttiva.



Per ridurre la resistenza di contatto si adottano varie strategie, spesso simultaneamente:

- a) si lucidano a specchio le superfici da porre in contatto, in modo da ridurre lo spessore medio delle cavità;
- b) si serrano tra loro le due superfici applicando una notevole pressione (ad esempio, tramite sistemi a molla o a vite), in modo da schiacciare le asperità ed aumentare la superficie effettiva di scambio termico;
- c) si interpone tra le due superfici un sottile film di materiale più conduttivo dell'aria (grassi siliconici, resine epossidiche, ecc.), che sostituisca in tutto o in parte l'aria all'interno delle cavità.



Si noti che, nel terzo caso, il film deve essere sottilissimo, poiché la sostanza che lo costituisce è comunque relativamente poco conduttiva, con  $\lambda = 0.5 \div 7 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ . Essa deve perciò riempire i vuoti e non interspersi tra le sommità delle microasperità superficiali, che sono fatte di materiale con conduttività assai più elevata.

## E.XII. Raffreddamento di un microprocessore: resistenza di contatto (2)

### – Problema

Si considerino il microprocessore ed il dissipatore termico di cui al problema precedente. Il primo presenta superficie di dissipazione del calore con dimensioni 8 mm x 8 mm e dissipa, in condizioni di massimo carico, una potenza termica pari a 80 W. Per il dissipatore, il fabbricante dichiara un resistenza termica pari a 0.5 °C/W. La temperatura dell'ambiente in cui il calore deve essere rilasciato è pari a 35°C.

Anche in questo caso si contempla la presenza di una resistenza termica d'interfaccia, localizzata in corrispondenza della superficie di contatto tra microprocessore e base della superficie alettata. Sia pari a 0.000007 °C·m<sup>2</sup>/W il valore specifico, riferito all'unità di superficie, di tale resistenza (tipico dell'accoppiamento silicio/alluminio con interposto un grasso conduttivo).

Determinare la temperatura massima che si potrebbe raggiungere nel microprocessore. Inoltre, determinare la resistenza termica massima che un dissipatore alternativo a quello considerato deve presentare perché le specifiche siano rispettate a pieno.

### – Dati

$\dot{Q}_{\max} = 80 \text{ W}$	(massima potenza dissipata dal microprocessore)
$A = 64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$	(superficie di scambio del microprocessore)
$T_a = 35^\circ\text{C}$	(temperatura ambiente)
$R_d = 0.5 \text{ }^\circ\text{C}/\text{W}$	(resistenza del dissipatore)
$R_c'' = 0.7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2/\text{W}$	(resistenza sup. di contatto con grasso conduttivo)
$T_{\max} = 75^\circ\text{C}$	(massima temp. ammessa nel microprocessore)

### – Determinare

$T_{\text{CPU}}$	(massima temperatura del microprocessore)
$R_{d,\text{ottimo}}$	(res. di un dissipatore conforme alle specifiche)

### – Ipotesi

Problema stazionario, effetti di bordo trascurabili, problema termico mono-dimensionale, resistenze alla conduzione all'interno del microprocessore trascurabili, superficie inferiore del microprocessore termicamente isolata.

### – Soluzione

La resistenza di contatto in questo caso vale:

$$R_c = R_c''/A = 0.11 \text{ }^\circ\text{C}/\text{W}$$

La resistenza termica complessiva della serie contatto-dissipatore è pari a:

$$R = R_c + R_d = 0.61 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

La massima temperatura che si può avere nel microprocessore è quindi:

$$T_{\text{CPU}} = T_a + R\dot{Q}_{\text{max}} = 83.75 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Per rispettare pienamente le specifiche del processore, in termini di temperatura massima ammissibile, occorre scegliere un dissipatore tale che:

$$R_{\text{d,ottimo}} \leq \frac{T_{\text{max}} - T_a}{\dot{Q}_{\text{max}}} - R_c = 0.39 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

– Commenti

Nessun moderno processore potrebbe essere raffreddato adeguatamente senza l'impiego di opportuni materiali di interfacciamento termico.

**E.XIII. Conduzione piana con cambiamento di fase**

– Problema

Un frigocontenitore a forma di parallelepipedo presenta dimensioni esterne 40 cm x 40 cm x 25 cm, spessore di parete 5 cm e conduttività termica del materiale di parete (polistirolo espanso) pari a 0.045 W/(m·°C). All'esterno la temperatura media è pari a 28°C, il coefficiente di scambio termico a 8 W/(m<sup>2</sup>·°C). Il vano interno del contenitore è completamente riempito di una sostanza a base acqua, inizialmente congelata, la cui temperatura si può assumere stabilizzata a 0°C fintantoché la transizione di fase solido/liquido non è completa; la temperatura si può peraltro assumere pari a 0°C anche sulla superficie interna del contenitore.

Valutare la potenza termica che, nelle condizioni sopra illustrate, attraversa le pareti del contenitore. Inoltre, assumendo per la sostanza una densità in fase solida ed un calore latente di liquefazione rispettivamente pari a 920 kg/m<sup>3</sup> e 334 kJ/kg, e trascurando gli eventuali effetti della variazione di densità legati alla transizione di fase, stimare il tempo necessario alla completa liquefazione.

– Dati

$L_1 = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$	(prima dimensione del frigocontenitore)
$L_2 = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$	(seconda dimensione del frigocontenitore)
$L_3 = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$	(terza dimensione del frigocontenitore)
$s = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$	(spessore di parete)
$\lambda = 0.045 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$	(conduttività termica di parete)
$T_e = 28^\circ\text{C}$	(temperatura esterna)
$h_e = 8 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$	(coefficiente di scambio termico esterno)
$T_g = T_i = 0^\circ\text{C}$	(temperatura superficiale interna)
$\rho_g = 920 \text{ kg}/\text{m}^3$	(densità della fase solida)
$c_g = 334 \text{ kJ}/\text{kg} = 334 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg}$	(calore latente di liquefazione)

– Determinare

Potenza termica entrante nel frigocontenitore

Tempo di liquefazione del ghiaccio

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo esterno uniforme, temperatura interna costante per tutta la liquefazione, temperatura superficiale interna uguale alla temperatura di liquefazione, effetti della variazione di densità legati alla transizione di fase trascurabili.

– Soluzione

Se si osserva in sezione una qualunque parete del frigocontenitore, si può chiaramente vedere che questa non presenta in realtà un'area di passaggio del calore uniforme rispetto allo spessore (vedi Es.E.VI). Il problema termico è quindi multi-dimensionale, ma può essere ricondotto a mono-dimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore. Tale area si potrebbe, in prima istanza, assumere pari all'area media di passaggio del calore, ovvero all'area in corrispondenza della metà dello spessore. Se però si preferisce operare in favore di sicurezza, è più conveniente far riferimento all'area della superficie esterna delle pareti (in tal modo si compensano in qualche misura anche gli effetti di bordo lungo gli spigoli).

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di scambio termico) è equivalente alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. A tal riguardo, poiché non si hanno informazioni specifiche, è da considerare esposta all'aria tutta la superficie esterna del frigocontenitore, inclusa quella di appoggio (il frigocontenitore potrebbe essere appoggiato su una griglia o su supporti di qualche tipo che lascino circolare liberamente l'aria): La superficie esterna del frigocontenitore presenta area totale:

$$A = 2 \cdot (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) = 0.72 \text{ m}^2$$

Di conseguenza, la resistenza complessiva delle pareti alla trasmissione del calore vale:

$$R = \frac{1}{A} \left( \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{h_e} \right) = 1.717 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasferita tra ambiente esterno ed ambiente interno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_e - T_i)}{R} = 16.3 \text{ W}$$

Il volume iniziale della sostanza ghiacciata nel frigocontenitore è pari a:

$$V_g = (L_1 - 2 \cdot s)(L_2 - 2 \cdot s)(L_3 - 2 \cdot s) = 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.15 = 0.0135 \text{ m}^3$$

La massa complessiva è quindi pari a:

$$m_g = \rho_g V_g = 12.4 \text{ kg}$$

In conclusione, il tempo di liquefazione vale:

$$t = \frac{c_g m_g}{\dot{Q}} = \frac{334 \cdot 10^3 \cdot 12.4}{16.3} = 2.513 \cdot 10^5 \text{ s} \cong 70 \text{ h}$$

– *Commenti*

Tra ghiaccio e pareti del contenitore esiste sicuramente una resistenza termica di interfaccia, legata alle sottili intercapedini d'aria che sono verosimilmente presenti. Inoltre, per effetto dell'aumento di densità (ovvero della diminuzione di volume) durante la transizione solido/liquido, è verosimile che le suddette intercapedini aumentino sensibilmente di spessore su alcune delle superfici interne del frigocontenitore, incrementando così le relative resistenze termiche (in maniera differenziata). Assumere la temperatura sulle superfici interne pari alla temperatura di liquefazione del ghiaccio significa trascurare le resistenze termiche di interfaccia, il che consente di semplificare notevolmente i calcoli e, al contempo, di operare in favore di sicurezza.

**ESERCIZI UNITA' F – SOMMARIO**

**F. CONDUZIONE MULTIDIMENSIONALE**

**F.I. Dissipazione di calore in un tubo percorso da acqua calda**

**F.II. Dissipazione di calore in un tubo percorso da acqua calda coibentato**

**F.III. Raggio critico di isolante**

**F.IV. Raggio critico di isolante (2)**

**F.V. Conduzione e convezione in geometria cilindrica**

**F.VI. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato**

**F.VII. Fattori di forma per conduzione: serbatoio sferico interrato**

**F.VIII. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato (2)**

**F.IX. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato (3)**

**F.I. Dissipazione di calore in un tubo percorso da acqua calda**

– Problema

In un tubo di rame con diametro interno 200 mm e spessore di parete 2 mm scorre acqua in pressione a temperatura costante di 170°C. Si assuma pari a 300 W/(m<sup>2</sup>·°C) il coefficiente di scambio termico convettivo interno (parete/acqua, convezione forzata in liquido), e pari a 399 W/(m·°C) la conduttività termica del rame.

Sapendo che l'ambiente intorno al tubo si trova a temperatura 20°C ed essendosi stimato pari a 5 W/(m<sup>2</sup>·°C) il coefficiente di scambio termico convettivo esterno (parete/aria, convezione naturale in aeriforme), determinare la potenza termica dissipata per unità di lunghezza del tubo.

– Dati

- $D_i = 200 \text{ mm} = 0.200 \text{ m}$  (diametro interno del tubo)
- $s_p = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$  (spessore di parete del tubo)
- $\lambda_p = 399 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica del rame)
- $T_i = 170^\circ\text{C}$  (temperatura dell'acqua all'interno del tubo)
- $h_i = 300 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione interno)
- $T_e = 20^\circ\text{C}$  (temperatura dell'aria ambiente)
- $h_e = 5 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione esterno)

– Determinare

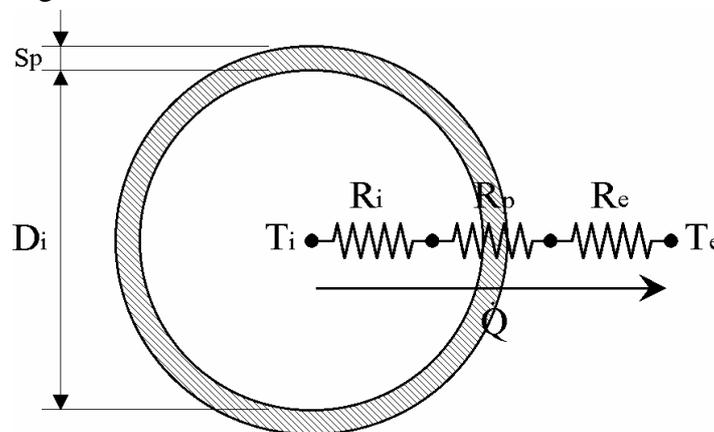
$\dot{Q}$  (potenza termica dispersa)

– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di convezione uniformi sulle pareti e lungo il condotto, conduzione mono-dimensionale in geometria cilindrica, effetti radiativi trascurabili.

– Soluzione

Il tubo in esame, visto in sezione, ed il circuito termico ad esso relativo possono essere rappresentati come segue:



Essendo richiesta la potenza termica dispersa per unità di lunghezza del tubo, conviene considerare un tratto di tubo di lunghezza unitaria:

$$L = 1 \text{ m}$$

Il diametro esterno del tubo vale, evidentemente:

$$D_e = D_i + 2 \cdot s_p = 0.204 \text{ m}$$

Le singole resistenze della serie possono essere calcolate tramite le relazioni sotto riportate. Per la resistenza convettiva interna (in acqua) si ha:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i \cdot \pi \cdot D_i L} = 0.005305 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

Per la resistenza conduttiva della parete in rame:

$$R_p = \frac{\ln(D_e/D_i)}{2\pi \cdot \lambda_p L} \equiv \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi \cdot \lambda_p L} = 0.000008 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

Per la resistenza convettiva esterna in aria:

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot D_e L} = 0.312069 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

La resistenza totale della serie vale:

$$R = R_i + R_p + R_e = 0.317382 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso la parete del tratto considerato, avente lunghezza 1 m, è in conclusione pari a:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 473 \text{ W (W/m)}$$

– Commenti

I vari contributi alla resistenza termica totale hanno peso molto differente tra loro. In particolare, la resistenza termica della parete in rame è così piccola rispetto alle altre da essere pressoché trascurabile.

**F.II. Dissipazione di calore in un tubo percorso da acqua calda coibentato**

– Problema

Si consideri il tubo del problema precedente, che questa volta si vuole rivestire con uno strato cilindrico di materiale isolante schiumato, avente conducibilità termica  $0.30 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ . Determinare quale spessore deve presentare tale rivestimento per dimezzare le dispersioni termiche, calcolando il conseguente diametro esterno del tubo coibentato.

– Dati

$$D_i = 200 \text{ mm} = 0.200 \text{ m} \quad (\text{diametro interno del tubo in rame})$$

$$s_p = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m} \quad (\text{spessore di parete del tubo in rame})$$

$$D_{p/s} = 0.204 \text{ m} \quad (\text{diametro esterno del tubo in rame})$$

$$\lambda_p = 399 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C}) \quad (\text{conduttività termica del rame})$$

- $\lambda_s = 0.30 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività dell'isolante termico schiumato)
- $T_i = 170\text{°C}$  (temperatura dell'acqua all'interno del tubo)
- $h_i = 300 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione interno)
- $T_e = 20\text{°C}$  (temperatura dell'aria ambiente)
- $h_e = 5 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione esterno)
- $L = 1 \text{ m}$  (lunghezza unitaria)
- $\dot{Q} = 472.6/2 \text{ W} = 236.3 \text{ W}$  (potenza termica dissipabile)

– Determinare

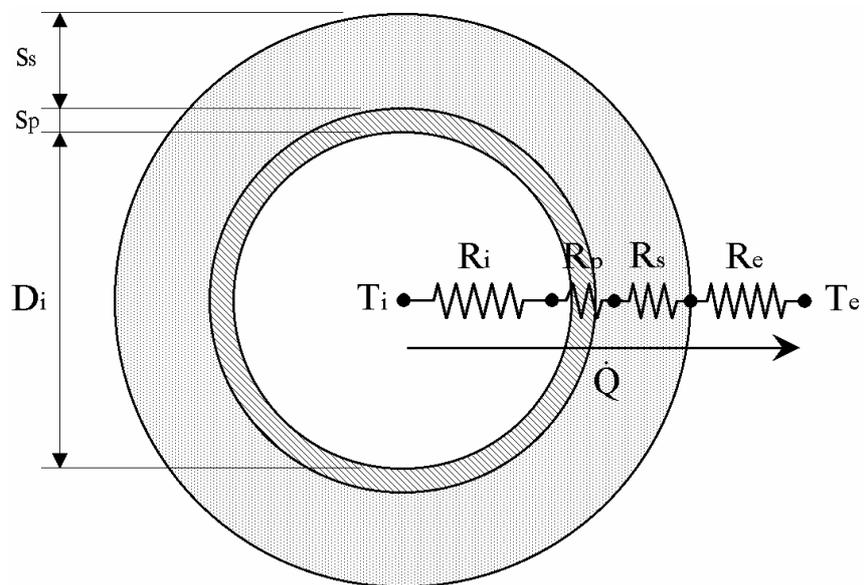
- $s_s$  (spessore del rivestimento isolante)
- $D_e$  (diametro esterno del tubo coibentato)

– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di convezione uniformi sulle pareti e lungo il condotto, conduzione mono-dimensionale in geometria cilindrica, resistenze di contatto trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– Soluzione

Il tubo in esame, visto in sezione, ed il circuito termico ad esso relativo sono rappresentati nella figura seguente:



Per non dissipare una potenza termica superiore a quella prescritta, la resistenza totale della serie deve presentare valore non inferiore a:

$$R = R_i + R_p + R_s + R_e = \frac{(T_i - T_e)}{\dot{Q}} = 0.634763 \text{ °C/W}$$

$R_i$  e  $R_p$  non sono cambiate rispetto al caso trattato nel problema precedente. Pertanto, impiegando i valori già calcolati, si ottiene:

$$R_s + R_e = R - R_i - R_p = 0.629450 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Le due resistenze incognite possono essere espresse in funzione di  $s_s$  come segue:

$$R_s + R_e = \frac{\ln[D_e/D_{p/s}]}{2\pi \cdot \lambda_s L} + \frac{1}{h_e A_e}$$

ovvero

$$\frac{\ln(1 + 2 \cdot s_s/D_{p/s})}{2\pi \cdot \lambda_s L} + \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot (D_{p/s} + 2 \cdot s_s)L} = 0.629450 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Poiché l'equazione precedente non è immediatamente esplicitabile rispetto a  $s_s$ , che compare a numeratore nel primo addendo e a denominatore nel secondo, è necessario procedere alla sua determinazione per tentativi, cercando di far sì che la parte sinistra dell'equazione coincida con la parte destra.

Tentativo	$s_s$ (m)	$R_s + R_e$
1	0.100	0.520078
2	0.200	0.681252
3	0.150	0.606142
4	0.170	0.637372
5	0.160	0.621967
<b>6</b>	<b>0.165</b>	<b>0.629720</b>

Un ragionevole accordo si ottiene per  $s_s = 165$  mm. In definitiva, si ottiene un diametro esterno del condotto coibentato pari a:

$$D_e = D_{p/s} + 2 \cdot s_s \equiv D_i + 2 \cdot (s_p + s_s) = 0.534 \text{ m} = 534 \text{ mm}$$

– Commenti

Il profilo radiale di temperatura può essere tracciato calcolando le temperature intermedie. A tal fine, va rammentato che la potenza termica trasmessa deve attraversare ogni strato resistivo della serie. Si ottiene quindi, per la temperatura sulla superficie interna del tubo in rame:

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 168.746^\circ\text{C} = 168.7^\circ\text{C}$$

Il piccolo salto di temperatura ( $<1.3^\circ\text{C}$ ) è dovuto al fatto che si è in presenza di convezione forzata in liquido, che comporta un coefficiente di convezione assai elevato.

All'interfaccia tra rame e isolante schiumato si ha:

$$T_{p/s} = T_i - (R_i + R_p) \dot{Q} \equiv T_{i,s} - R_p \cdot \dot{Q} = 168.744^\circ\text{C}$$

Il salto di temperatura attraverso il rame è addirittura trascurabile. Pertanto il rivestimento in schiumato raggiunge, sulla sua superficie interna, una temperatura prossima a quella dell'acqua calda ( $170^\circ\text{C}$ ), il che richiede l'impiego di un materiale con adeguate proprietà di resistenza alle alte temperature. Si ricorda che si sono trascurate, in favore di sicurezza, le resistenze di contatto tra rame e rivestimento.

Per calcolare la temperatura sulla superficie esterna dello strato isolante occorre valutare preliminarmente la resistenza dello strato isolante medesimo, oppure la resistenza convettiva esterna in aria:

$$R_s = \frac{\ln(D_e/D_{p/s})}{2\pi \cdot \lambda_s L} = \frac{\ln[1 + 2 \cdot s_s/D_{p/s}]}{2\pi \cdot \lambda_s L} = 0.5105 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

ovvero

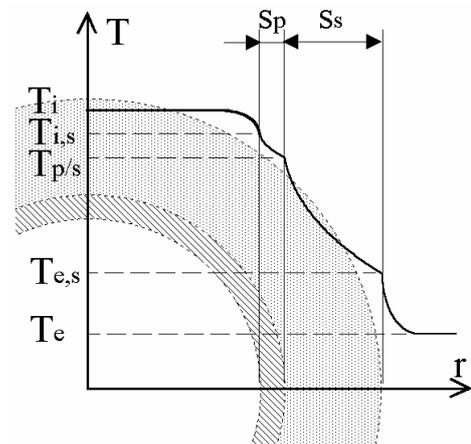
$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot (D_{p/s} + 2 \cdot s_s) L} = 0.1192 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Si ha quindi:

$$T_{e,s} = T_{p/s} + R_s \cdot \dot{Q} \equiv T_e - R_e \cdot \dot{Q} = 48.2^\circ\text{C}$$

Il profilo di temperatura attraverso la parete è quello rappresentato nella figura a lato.

L'andamento attraverso gli strati conduttivi è, in geometria cilindrica ed in assenza di generazione, di tipo logaritmico – non lineare, quindi. L'andamento in aria, attraverso lo strato limite convettivo esterno e attraverso lo strato limite convettivo interno, è reso solo qualitativamente.



La conduttività termica attribuita all'isolante è superiore di un ordine di grandezza a quella dei materiali commercialmente disponibili, per i quali si ha  $\lambda_s = 0.030 \div 0.060 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ . Inoltre, per il coefficiente di scambio termico superficiale si hanno valori circa doppi, con  $h_e = 8 \div 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ . Ciononostante, i risultati ottenuti rimangono perfettamente validi da un punto di vista concettuale.

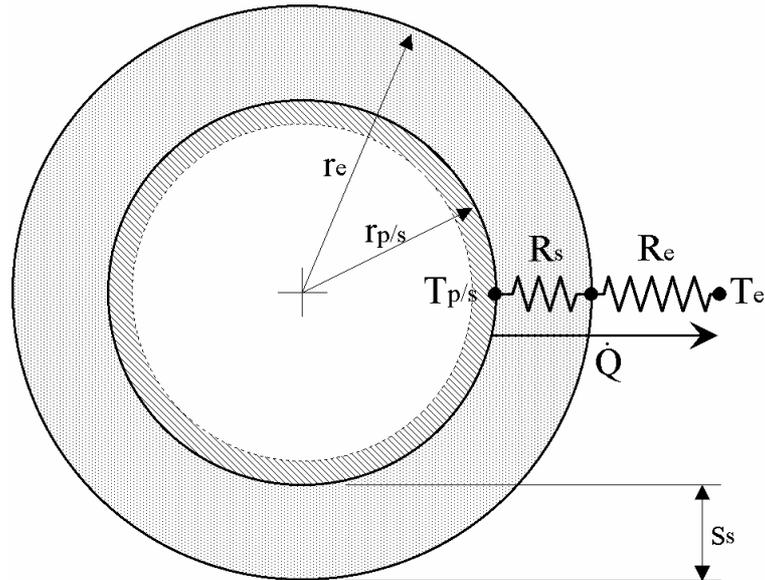
### F.III. Raggio critico di isolante

– Problema

Un tubo con diametro 300 mm presenta temperatura superficiale (esterna) pari a  $200^\circ\text{C}$ . Il tubo è posto in un ambiente a temperatura  $20^\circ\text{C}$  e, per ridurre le perdite di calore verso l'ambiente suddetto, deve essere rivestito con uno strato di isolante termico schiumato avente conduttività  $0.35 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ . Sapendo che il coefficiente di scambio termico convettivo sulla superficie esterna dello schiumato è mediamente pari a  $2 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , si calcoli il calore scambiato con l'ambiente in funzione dello spessore del rivestimento isolante.

– Dati e schema

- $D_{p/s} = 300 \text{ mm} = 0.300 \text{ m}$  (diametro esterno del tubo non coibentato)
- $T_{p/s} = 200^\circ\text{C}$  (temperatura esterna del tubo non coibentato)
- $T_e = 20^\circ\text{C}$  (temperatura dell'aria ambiente)
- $h_e = 2 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione esterno)
- $\lambda_s = 0.35 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività dell'isolante termico schiumato)



– Determinare

$$\dot{Q} = \dot{Q}(s_s) \quad (\text{potenza dispersa vs. spessore di isolante})$$

– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di convezione uniformi sulle pareti e lungo il condotto, conduzione monodimensionale in geometria cilindrica, resistenze di contatto trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– Soluzione

Facendo riferimento al circuito termico in figura, la potenza termica che attraversa lo strato cilindrico di isolante e l'interfaccia convettiva esterna può essere espressa come segue:

$$\dot{Q}(s_s) = \frac{(T_{p/s} - T_e)}{R_s + R_e} = \frac{(T_{p/s} - T_e)}{\frac{\ln(r_e/r_{p/s})}{2\pi \cdot \lambda_s L} + \frac{1}{h_e \cdot 2\pi \cdot r_e L}}$$

Nell'equazione si sono introdotti i seguenti parametri:

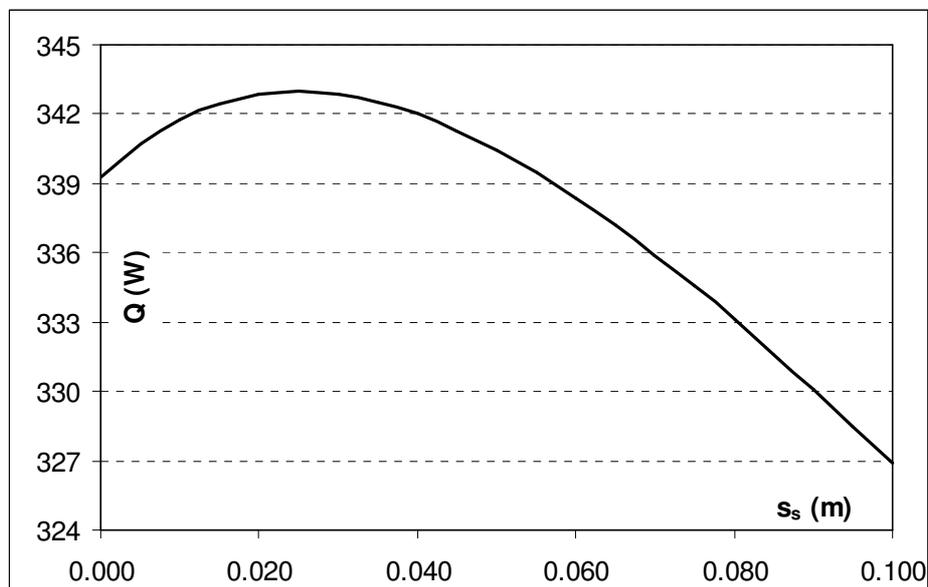
$$r_{p/s} = \frac{D_{p/s}}{2} = 0.150 \text{ m}, \quad r_e = r_{p/s} + s_s$$

Non essendo specificata la lunghezza del tubo, è conveniente far riferimento ad un tratto di tubo con lunghezza unitaria:

$$L = 1 \text{ m}$$

Sostituendo una sequenza crescente di valori di  $s_s$ , si ottengono i valori della potenza termica scambiata riportati nella tabella seguente:

$s_s$ (m)	$\dot{Q}$ (W)		$s_s$ (m)	$\dot{Q}$ (W)
0.000	339.3		0.055	339.5
0.005	340.7		0.060	338.4
0.010	341.7		0.065	337.2
0.015	342.4		0.070	335.9
0.020	342.8		0.075	334.5
0.025	343.0		0.080	333.1
0.030	342.9		0.085	331.6
0.035	342.5		0.090	330.1
0.040	342.0		0.095	328.5
0.045	341.3		0.100	326.9
0.050	340.5			



Si noti che la massima potenza scambiata non si ha in corrispondenza dell'ascissa  $s_s = 0$ . Il valore di  $s_s$  per il quale si verifica il massimo si può individuare differenziando rispetto a  $r_e$  la relazione per il calcolo della potenza termica scambiata ed uguagliando il risultato a zero.

$$\frac{d\dot{Q}}{dr_e} = 2\pi \cdot L(T_{p/s} - T_e) \cdot \frac{\frac{1}{\lambda_s r_e} - \frac{1}{h_e r_e^2}}{\left[ \frac{\ln(r_e/r_{p/s})}{\lambda_s} + \frac{1}{h_e r_e} \right]} = 0$$

I fattori moltiplicativi a sinistra del rapporto ed il denominatore del rapporto stesso sono tutti non nulli e, di conseguenza, possono essere eliminati. Si ottiene così

$$\frac{1}{\lambda_s r_e} - \frac{1}{h_e r_e^2} = 0$$

ovvero, poiché  $r_e$  è necessariamente non nullo,

$$\frac{1}{\lambda_s} - \frac{1}{h_e r_e} = 0$$

Risolviendo la relazione precedente rispetto a  $r_e$ , si ottiene il cosiddetto “raggio critico” di isolamento termico (o raggio critico di isolante):

$$r_{e,critico} = \frac{\lambda_s}{h_e} = 0.175 \text{ m} = 175 \text{ mm}$$

In definitiva, lo spessore di isolante che comporta la massima potenza termica trasmessa vale:

$$s_{s,critico} = r_{e,critico} - r_{p/s} = 0.025 \text{ m} = 25 \text{ mm}$$

– Commenti

In geometria cilindrica, non è assolutamente detto che l’aggiunta di isolante termico diminuisca il calore scambiato. Ciò si verifica solo una volta che si è superato un certo valore del raggio esterno (o del diametro esterno) dello strato di isolante, detto “raggio critico di isolamento”.

Anche in questo caso, i valori attribuiti alla conduttività termica dell’isolante e al coefficiente di scambio termico esterno non sono realistici.

**F.IV. Raggio critico di isolante (2)**

– Problema

Un cavo elettrico con diametro 4 mm e resistenza per unità di lunghezza pari a  $0.8 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m}$  è ricoperto da uno strato di materiale plastico per isolamento elettrico, caratterizzato da conduttività  $0.18 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  e massima temperatura ammessa pari a  $120^\circ\text{C}$ . Il coefficiente di convezione sulla superficie esterna del cavo rivestito si può stimare pari a  $12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , mentre la temperatura ambiente massima prevista è pari a  $35^\circ\text{C}$ .

Dimensionare l’isolamento plastico in modo da massimizzare la corrente che può attraversare il cavo è stimare il valore di tale corrente.

– Dati e schema

- $d_c = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m}$  (diametro del cavo elettrico non rivestito)
- $R' = 0.8 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m}$  (resistenza elettrica per unità di lunghezza del cavo)
- $\lambda_r = 0.18 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività del materiale plastico di rivestimento)
- $T_{r,max} = 120^\circ\text{C}$  (massima temperatura ammessa per il materiale plastico di rivestimento)
- $h_e = 12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione sulla superficie esterna del cavo rivestito)
- $T_e = 35^\circ\text{C}$  (massima temperatura prevista per l’aria ambiente)

– Determinare

- $s_r$  (spessore rivestimento)
- $I_{max}$  (massima corrente ammessa)

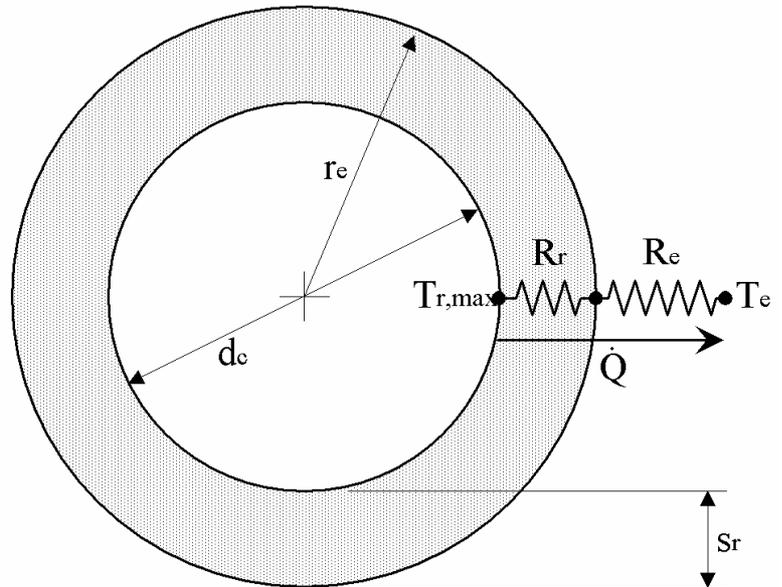
– Ipotesi

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti e lungo il cavo, conduzione mono-dimensionale in geometria cilindrica, resistenze di contatto trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– Soluzione

Poiché la produzione di calore (per effetto Joule) ha luogo soltanto nel cavo elettrico, nel rivestimento plastico la massima temperatura si verificherà in corrispondenza della superficie di contatto con il cavo stesso. Pertanto, il problema si può schematizzare mediante il circuito termico equivalente in figura.

Alla luce di quanto visto nel problema F-III, la massima dissipazione del calore verso l'ambiente si avrà per uno spessore del rivestimento tale che il raggio esterno del cavo rivestito sia pari al raggio critico di isolamento. Tale raggio critico vale:



$$r_e = \frac{\lambda_r}{h_e} = \frac{0.18}{12} = 0.015 \text{ m} = 15 \text{ mm}$$

Il raggio del cavo non rivestito è ovviamente pari a:

$$r_c = \frac{d_c}{2} = 0.002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Lo spessore del rivestimento plastico vale quindi:

$$s_r = r_e - r_c = 0.013 \text{ m} = 13 \text{ mm}$$

Per stimare la potenza termica trasmessa attraverso lo strato cilindrico di isolante e l'interfaccia convettiva esterna, conviene far riferimento ad un tratto di cavo con lunghezza unitaria ( $L = 1 \text{ m}$ ), in cui la resistenza termica del rivestimento plastico vale:

$$R_r = \frac{\ln(r_e/r_c)}{2\pi\lambda_r L} = \frac{\ln(0.015/0.002)}{2\pi \cdot 0.30 \cdot 1} = 1.782 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza termica dello strato convettivo esterno vale:

$$R_e = \frac{1}{h_e 2\pi r_e L} = \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.015 \cdot 1} = 0.884 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasmessa che comporta un valore pari al massimo ammissibile della temperatura sulla superficie interna del rivestimento plastico si può stimare mediante la seguente relazione:

$$\dot{Q}_{\max} = \frac{(T_{r,\max} - T_e)}{R_r + R_e} = \frac{120 - 35}{1.782 + 0.884} = 31.9 \text{ W (ovvero W/m)}$$

Considerando che tale potenza, riferita ad un tratto di cavo di lunghezza unitaria (e la cui misura si può quindi indicare anche in W/m), è quella massima dissipabile nelle condizioni esaminate, la massima corrente elettrica ammissibile può essere calcolata mediante la legge di Ohm:

$$\dot{Q}_{\max} = R' I_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = \sqrt{\frac{\dot{Q}_{\max}}{R'}} = \sqrt{\frac{31.9}{0.8 \cdot 10^{-4}}} = 631 \text{ A}$$

– Commenti

Nella pratica, la funzione primaria del rivestimento è quella di assicurare un adeguato isolamento elettrico. Lo spessore minimo da adottare è quindi vincolato al grado di isolamento elettrico richiesto, indipendentemente dai problemi di ordine termico.

La stima del coefficiente di convezione superficiale non è mai molto accurata, ed è in generale opportuno porsi in favore di sicurezza. Se, ad esempio, per  $h_e$  si può stimare un valore tipico pari a  $12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , ma si può prevedere che in talune condizioni operative  $h_e$  possa scendere fino a  $5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , è più opportuno far riferimento a quest'ultimo valore per la stima della corrente massima ammissibile:

$$R_e = \frac{1}{h_e 2\pi r_e L} = \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.015 \cdot 1} = 2.122 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{W}$$

$$\dot{Q}_{\max} = \frac{(T_{r,\max} - T_e)}{R_r + R_e} = \frac{120 - 35}{1.782 + 2.122} = 21.8 \text{ W (ovvero W / m)}$$

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{\dot{Q}_{\max}}{R'}} = \sqrt{\frac{21.8}{0.8 \cdot 10^{-4}}} = 522 \text{ A}$$

In generale, non sussistono problemi se il valore effettivo di  $h_e$  è superiore a quello atteso.

**F.V. Conduzione e convezione in geometria cilindrica**

– Problema

Si consideri un dispositivo elettronico a geometria cilindrica verticale, con altezza 38.1 mm, diametro 12.7 mm e superfici circolari superiore ed inferiore termicamente isolate. Siano  $48^\circ\text{C}$  la temperatura misurata sulla superficie laterale e  $32^\circ\text{C}$  la temperatura dell'aria ambiente. Avendo stimato il coefficiente di convezione tramite una delle relazioni reperibili nei manuali, valutare la potenza elettrica dissipata all'interno del dispositivo. Inoltre, sapendo che la parte più esterna del dispositivo è costituita da un guscio cilindrico in materiale plastico con spessore 3 mm e conduttività termica  $0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ , valutare la temperatura sulla superficie interna del guscio.

– Dati

- $L = 38.1 \text{ mm} = 0.0381 \text{ m}$  (altezza del dispositivo)
- $D = 12.7 \text{ mm} = 0.0127 \text{ m}$  (diametro del dispositivo)
- $T_s = 48^\circ\text{C}$  (temperatura superficiale)
- $T_a = 32^\circ\text{C}$  (temperatura dell'aria)

$s = 3 \text{ mm} = 0.003 \text{ m}$  (spessore del guscio esterno)  
 $\lambda = 0.2 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica del guscio esterno)

– Determinare

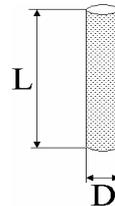
Potenza termica dissipata,  $\dot{Q}$   
 Temperatura all'interno del guscio plastico,  $T_i$

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, superfici superiore ed inferiore termicamente isolate, effetti radiativi trascurabili, condizioni stazionarie.

– Soluzione

Una relazione reperibile in letteratura per la stima del coefficiente di convezione, relativa alla situazione geometrica raffigurata a lato, è la seguente:



$$h_{\text{conv}} = 1.42 \cdot (\Delta T/L)^{0.25}$$

Tale relazione permette di effettuare la seguente stima del coefficiente di convezione:

$$h_{\text{conv}} = 1.42 \cdot \left( \frac{T_s - T_a}{L} \right)^{0.25} = 6.43 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

Essendo termicamente isolate le superfici circolari superiore ed inferiore del dispositivo, la superficie di scambio termico è solo quella cilindrica laterale, la cui area vale:

$$A = \pi \cdot DL = 1.52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

La resistenza alla trasmissione del calore tra dispositivo ed ambiente vale quindi:

$$R_h = \frac{1}{h_{\text{conv}} A} = 102 \text{ °C/W}$$

In condizioni stazionarie, la potenza termica dissipata all'interno del dispositivo deve attraversare integralmente la resistenza termica di cui sopra, da cui:

$$\dot{Q} = \frac{(T_s - T_a)}{R_h} = 0.156 \text{ W} = 156 \text{ mW}$$

La stessa potenza termica deve attraversare il guscio cilindrico in materiale plastico che costituisce la parte più esterna del dispositivo. Il diametro interno di tale guscio vale:

$$d = D - 2 \cdot s = 0.0067 \text{ m}$$

La resistenza alla trasmissione del calore del guscio vale:

$$R_h = \frac{\ln(D/d)}{2\pi \cdot \lambda L} = 13.4 \text{ °C/W}$$

In conclusione, la temperatura sulla superficie interna del guscio plastico vale:

$$T_i = T_s + R_h \dot{Q} = 50.1 \text{ °C}$$

– Commenti

Relazioni empiriche come quella impiegata per stimare il coefficiente di convezione presentano un margine di incertezza sul valore stimato che raramente è inferiore al 20%. Di

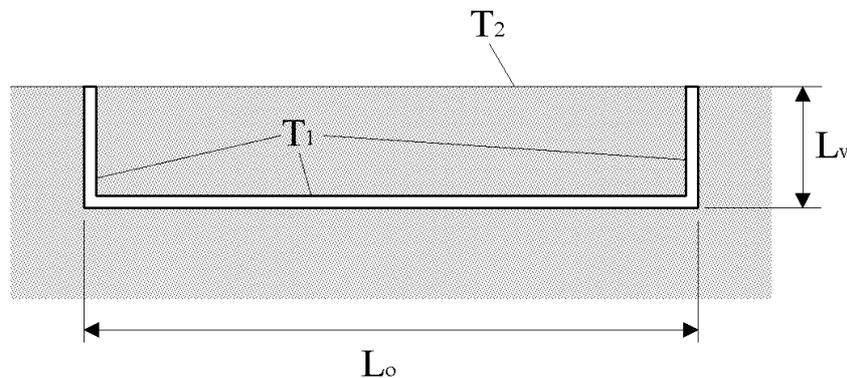
ciò va tenuto debitamente conto nei calcoli tecnici, ad esempio adottando opportuni coefficienti di sicurezza.

**F.VI. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato**

– Problema

Determinare la quantità di calore perduta istantaneamente da un tubo di rame con diametro esterno 50 mm, interrato e disposto come in figura, la cui temperatura superficiale è pari a 50°C. La temperatura superficiale e la conduttività termica del terreno sono rispettivamente pari a 10°C e 1.1 W/(m·°C).

Si trascurino le perdite in corrispondenza delle giunzioni ad angolo tra tratti rettilinei.



– Dati

- $D = 50 \text{ mm} = 0.050 \text{ m}$  (diametro esterno del tubo in rame)
- $T_1 = 50^\circ\text{C}$  (temperatura superficiale esterna del tubo in rame)
- $T_2 = 10^\circ\text{C}$  (temperatura superficiale del terreno)
- $\lambda = 1.1 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$  (conduttività termica del terreno)
- $L_v = 1 \text{ m}$  (lunghezza dei tratti verticali)
- $L_o = 5 \text{ m}$  (lunghezza del tratto orizzontale)

– Determinare

- $\dot{Q}$  (potenza termica perduta dal tubo)

– Ipotesi

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee, perdite negli angoli trascurabili.

– Soluzione

Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione.

Per i due tratti verticali, alla condizione (evidentemente verificata) che  $L_v \gg D$ , il fattore di forma  $S_v$  vale:

$$S_v = \frac{2\pi L_v}{\ln(4L_v/D)} = \frac{2\pi \cdot 1}{\ln(4 \cdot 1/0.050)} = 1.434 \text{ m}$$

Per il tratto orizzontale, interrato a profondità  $z = L_v = 1$  m, è possibile calcolare un fattore di forma per conduzione a condizione che  $L_o \gg D$  e che  $z > 1.5 D$ , entrambe evidentemente verificate. Pertanto, il fattore di forma  $S_o$  vale:

$$S_o = \frac{2\pi L_o}{\ln(4z/D)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{\ln(4 \cdot 1/0.050)} = 7.169 \text{ m}$$

Il fattore di forma complessivo vale:

$$S = 2 \cdot S_v + S_o = 2 \cdot 1.434 + 7.169 = 10.0368 \text{ m}$$

In conclusione, la potenza termica persa dal tubo attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q} = S\lambda(T_1 - T_2) = 10.0368 \cdot 1.1 \cdot (50 - 10) = 442 \text{ W}$$

– Commenti

Se il tubo è quello di un impianto di riscaldamento, va opportunamente coibentato (a meno che la potenza termica dispersa non vada comunque a finire nell'ambiente riscaldato).

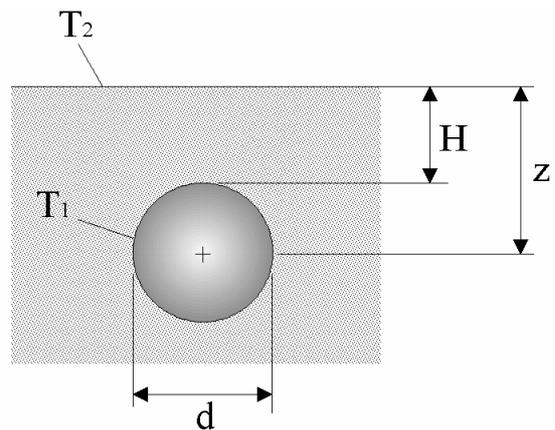
**F.VII. Fattori di forma per conduzione: serbatoio sferico interrato**

– Problema

Un serbatoio sferico con diametro esterno 250 cm e spessore di parete 4 mm viene interrato in modo tale che la sua parte più alta sia 120 cm sotto la superficie del terreno. La conduttività termica del terreno è pari a  $0.7 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ . Il serbatoio è riempito con acqua, che viene fatta ghiacciare durante la stagione invernale, per accumulare freddo sotto forma di calore latente di solidificazione.

Assumendo che il serbatoio venga completamente riempito di ghiaccio (densità  $920 \text{ kg/m}^3$ , calore latente di liquefazione  $333.7 \text{ kJ/kg}$ ) e che la sua superficie esterna si mantenga sempre a  $0^\circ\text{C}$  e che la superficie del terreno sia mediamente a  $20^\circ\text{C}$ , determinare quale frazione in massa di ghiaccio si scioglie nell'arco di 60 giorni per effetto degli scambi termici con il terreno.

Determinare inoltre quale frazione di massa si perde se, senza variare la posizione del guscio rispetto alla superficie del terreno, lo si riveste con un involucro sferico spesso 120 mm, realizzato in materiale termicamente isolante con conduttività termica  $0.06 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ .



– Dati

- $d = 250 \text{ cm} = 2.50 \text{ m}$  (diametro del serbatoio sferico)
- $H = 120 \text{ cm} = 1.20 \text{ m}$  (profondità di sotterramento del serbatoio)
- $s_p = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m}$  (spessore di parete del serbatoio)
- $\lambda_t = 0.7 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica del terreno)
- $T_1 = 0^\circ\text{C}$  (temperatura superficiale esterna del serbatoio)

- $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$  (densità dell'acqua ghiacciata)  
 $c = 333.7 \text{ kJ/kg} = 333.7 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$  (calore latente di solidificazione/liquefazione dell'acqua)  
 $T_2 = 20^\circ\text{C}$  (temperatura superficiale media del terreno)  
 $t = 60 \text{ gg} = 5.186 \cdot 10^6 \text{ s}$  (periodo temporale di riferimento)  
 $s_i = 120 \text{ mm} = 0.120 \text{ m}$  (spessore di parete del serbatoio)  
 $\lambda_i = 0.06 \text{ W/(m}\cdot^\circ\text{C)}$  (conduttività termica dell'involucro sferico)

– Determinare

$f_i$  (frazione di ghiaccio liquefatta)

– Ipotesi

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee.

– Soluzione

Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione, per il cui calcolo sono disponibili nella manualistica di riferimento svariate soluzioni analitiche. Per il caso in esame, si può impiegare la soluzione per una sfera isoterma interrata in un mezzo semi-infinito.

La profondità  $z$  del centro del serbatoio sferico vale:

$$z = H + d/2 = 2.45 \text{ m}$$

Alla condizione (evidentemente verificata) che  $z > d/2$ , il fattore di forma  $S$  è valutabile mediante la relazione:

$$S = \frac{2\pi \cdot d}{1 - 0.25d/z} = \frac{2\pi \cdot 2.50}{1 - 0.25 \cdot 2.50/2.45} = 21.087 \text{ m}$$

La potenza termica trasmessa attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q} = S\lambda_t(T_2 - T_1) = 21.087 \cdot 0.7 \cdot (25 - 0) = 295 \text{ W}$$

L'energia trasmessa nel periodo di riferimento vale:

$$Q = \dot{Q}t = 295 \cdot 5.184 \cdot 10^6 = 1.530 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A ciò corrisponde, alla fine del periodo di tempo considerato, una massa di ghiaccio liquefatta pari a:

$$m_1 = \frac{Q}{c} = \frac{1.530 \cdot 10^9}{333700} = 4586 \text{ kg}$$

Il raggio interno del serbatoio è pari a:

$$r = d/2 - s = 2.50/2 - 0.004 = 1.246 \text{ m}$$

Il volume interno del serbatoio, occupato dall'acqua ghiacciata, è quindi pari a:

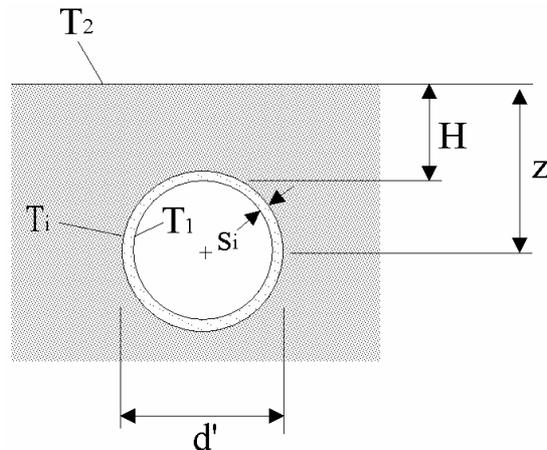
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1.246^3 = 6.503 \text{ m}^3$$

La massa di ghiaccio inizialmente contenuta nel serbatoio vale:

$$m = \rho V = 5983 \text{ kg}$$

In conclusione, il ghiaccio che si è liquefatto alla fine del periodo considerato rappresenta una frazione in massa pari a:

$$f_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{4583}{5983} = 0.767 = 76.7\%$$



Se si avvolge il serbatoio nel guscio sferico di materiale termicamente isolante citato nel testo (vedi schema nella figura precedente), la superficie esterna del guscio presenta diametro:

$$d' = d + 2 \cdot s_i = 2.50 + 2 \cdot 0.120 = 2.74 \text{ m}$$

La profondità  $z$  del centro del serbatoio non cambia. Pertanto, il fattore di forma per conduzione riferito alla superficie esterna dell'isolamento vale:

$$S' = \frac{2\pi \cdot d'}{1 - 0.25 d'/z} = \frac{2\pi \cdot 2.74}{1 - 0.25 \cdot 2.74/2.45} = 23.897 \text{ m}$$

Il prodotto del fattore di forma per la conduttività termica del terreno rappresenta l'inverso della resistenza alla conduzione termica di forma tra la superficie esterna della sfera e la superficie del suolo:

$$R_{s'} = \frac{1}{S' \lambda_t} = \frac{1}{23.897 \cdot 0.7} = 0.060 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza alla conduzione termica associata al guscio sferico isolante vale:

$$R_i = \frac{d' - d}{2\pi \cdot d' d \lambda_i} = \frac{2.74 - 2.50}{2\pi \cdot 2.74 \cdot 2.50 \cdot 0.06} = 0.093 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Se si trascura il calore sensibile che può essere accumulato dalle capacità termiche della parete del serbatoio e del materiale isolante, verosimilmente ridotte, la potenza termica che attraversa il terreno compreso tra superficie esterna della sfera e superficie del suolo deve attraversare integralmente il guscio isolante suddetto. Se ne deduce che la resistenza alla conduzione termica associata al guscio isolante lavora in serie con la resistenza termica di forma. La resistenza complessiva vale quindi:

$$R' = R_{s'} + R_i = 0.060 + 0.093 = 0.153 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q}' = \frac{(T_2 - T_1)}{R'} = \frac{(25 - 0)}{0.153} = 131 \text{ W}$$

L'energia trasmessa nel periodo di riferimento vale:

$$Q' = \dot{Q}' t = 131 \cdot 5.184 \cdot 10^6 = 0.679 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A ciò corrisponde, alla fine del periodo di tempo considerato, una massa di ghiaccio liquefatta pari a:

$$m'_1 = \frac{Q'}{c} = \frac{0.679 \cdot 10^9}{333700} = 2034 \text{ kg}$$

Nel caso del serbatoio coibentato, il ghiaccio che si è liquefatto alla fine del periodo considerato rappresenta una frazione in massa pari a:

$$f'_1 = \frac{m'_1}{m} = \frac{2034}{5983} = 0.340 = 34\%$$

– Commenti

È evidente che il serbatoio va adeguatamente coibentato.

La temperatura sulla superficie esterna dell'involucro isolante vale:

$$T_i = T_1 + R_i \dot{Q}' = 0 + 0.093 \cdot 131 = 12.2^\circ\text{C}$$

**F.VIII. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato (2)**

– Problema

In un tubo in plastica con lunghezza 25 m, diametro interno 100 mm e diametro esterno 122 mm, interrato orizzontalmente a profondità 120 cm (riferita all'asse), scorre un fluido a temperatura  $T_f=65^\circ\text{C}$  pressoché costante. Siano pari a  $150 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  il coefficiente di convezione sulla superficie interna del tubo, a  $1.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  la conduttività termica delle pareti del tubo e a  $0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  la conduttività termica del terreno. Selezionando, tra le varie relazioni disponibili nei manuali, una relazione per il calcolo del fattore di forma per conduzione, stimare la potenza termica persa dal fluido verso la superficie del terreno, mediamente a temperatura  $25^\circ\text{C}$ .

– Dati

$L = 25 \text{ m}$	(lunghezza del tubo)
$d = 100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$	(diametro interno del tubo)
$D = 122 \text{ mm} = 0.122 \text{ m}$	(diametro esterno del tubo)
$Z = 120 \text{ cm} = 1.20 \text{ m}$	(profondità del tubo, riferita all'asse)
$T_f = 65^\circ\text{C}$	(temperatura del fluido)
$T_s = 25^\circ\text{C}$	(temperatura in superficie)
$h = 150 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$	(coefficiente di convezione interno)
$\lambda_p = 1.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$	(conduttività termica di parete del tubo)
$\lambda_t = 0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$	(conduttività termica del terreno)

– Determinare

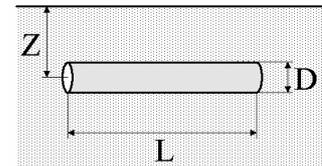
Potenza termica perduta dal tubo,  $\dot{Q}$

– Ipotesi

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee, temperatura del liquido costante, coefficiente di convezione omogeneo.

– Soluzione

Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione. In letteratura è reperibile la seguente relazione, relativa alla situazione geometrica raffigurata a lato:



$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} \quad \text{valida per } L \gg D, \quad Z > 1.5 \cdot D$$

Il diametro di riferimento è quello esterno del tubo. La verifica delle condizioni di validità restituisce:

$$L/D = 25/0.122 = 205 \gg 1 \quad \Rightarrow \text{OK!}$$

$$Z = 1.20/0.122 = 9.8 > 1.5 \quad \Rightarrow \text{OK!}$$

Il fattore di forma vale quindi:

$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} = \frac{2\pi \cdot 25}{\ln(4 \cdot 1.20/0.122)} = 42.8 \text{ m}$$

La resistenza termica di forma vale (vedi Es.F.VI-VII):

$$R_f = \frac{1}{S\lambda_t} = \frac{1}{42.8 \cdot 0.5} = 0.0468 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica che attraversa il terreno compreso tra superficie esterna del tubo e superficie esposta all'aria deve attraversare anche le pareti del tubo e l'interfaccia convettiva tra queste e il liquido. Se ne deduce che la resistenza alla conduzione termica delle pareti e la resistenza convettiva lavorano in serie con la resistenza termica di forma (cfr. Es.F.VII). La resistenza conduttiva delle pareti vale:

$$R_p = \frac{\ln(D/d)}{2\pi \cdot \lambda_p L} = \frac{\ln(0.122/0.100)}{2\pi \cdot 1.20 \cdot 25} = 0.00105 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza convettiva all'interno del tubo vale:

$$R_c = \frac{1}{\pi \cdot dLh} = \frac{1}{\pi \cdot 0.100 \cdot 25 \cdot 150} = 0.00085 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza complessiva vale quindi:

$$R = R_f + R_p + R_c = 0.0487 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In conclusione, la potenza termica persa dal tubo attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_f - T_s)}{R} = \frac{(65 - 25)}{0.0487} = 822 \text{ W}$$

**F.IX. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato (3)**

– Problema

In un condotto per teleriscaldamento con lunghezza 325 m, diametro interno 80 mm e spessore di parete 5 mm, rivestito esternamente da uno strato cilindrico di materiale isolante con spessore 50 mm ed interrato a profondità 150 cm (riferita al punto più elevato della sezione trasversale del rivestimento isolante), scorre acqua calda a temperatura 90°C pressoché costante. Si assumano pari a 300 W/(m<sup>2</sup>·°C) il coefficiente di convezione sulla superficie interna del tubo, e a 12 W/(m·°C), 0.05 W/(m·°C) e 0.4 W/(m·°C), rispettivamente, le conduttività termiche del materiale di parete (metallico), del materiale isolante e del terreno. Selezionando, tra le varie relazioni disponibili nei manuali, una relazione per il calcolo del fattore di forma per conduzione, stimare la potenza termica persa dal fluido verso la superficie del terreno, che è mediamente a temperatura 20°C.

– Dati

- L = 325 m (lunghezza del condotto)
- d = 80 mm = 0.080 m (diametro interno del condotto)
- s<sub>p</sub> = 5 mm = 0.005 m (spessore di parete del condotto)
- s<sub>r</sub> = 50 mm = 0.050 m (spessore del rivestimento isolante)
- z = 150 cm = 1.50 m (profondità di interramento)
- T<sub>f</sub> = 90°C (temperatura del fluido)
- h<sub>i</sub> = 300 W/(m<sup>2</sup>·°C) (coefficiente di convezione interno)
- λ<sub>p</sub> = 12 W/(m·°C) (conduttività termica di parete)
- λ<sub>r</sub> = 0.05 W/(m·°C) (conduttività termica del rivestimento isolante)
- λ<sub>t</sub> = 0.4 W/(m·°C) (conduttività termica del terreno)
- T<sub>s</sub> = 20°C (temperatura superficiale)

– Determinare

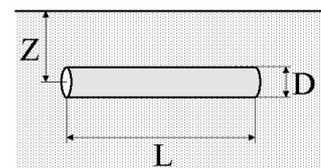
Potenza termica perduta dall'acqua calda,  $\dot{Q}$

– Ipotesi

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee, temperatura del liquido costante, coefficiente di convezione omogeneo

– Soluzione

Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione. In letteratura è reperibile la seguente relazione, relativa alla situazione geometrica raffigurata a lato:



$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} \quad \text{valida per } L \gg D, Z > 1.5 \cdot D$$

Il diametro di riferimento è quello esterno del rivestimento isolante, che vale:

$$D = d + 2 \cdot (s_p + s_r) = 0.080 + 2 \cdot (0.005 + 0.050) = 0.190 \text{ m} = 190 \text{ mm}$$

La verifica della prima condizione di validità restituisce:

$$L/D = 325/0.190 = 1711 \gg 1 \quad \Rightarrow \text{OK!}$$

La profondità  $Z$  dell'asse del condotto (diversa da  $z$ ) è pari a

$$Z = z + D/2 = 1.50 + 0.95 = 1.595 \text{ m}$$

La verifica della seconda condizione di validità restituisce:

$$Z = 1.595/0.190 = 8.4 > 1.5 \quad \Rightarrow \text{OK!}$$

Il fattore di forma per conduzione vale quindi:

$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} = \frac{2\pi \cdot 325}{\ln(4 \cdot 1.595/0.190)} = 581 \text{ m}$$

La resistenza termica di forma vale (vedi Es.F.VI-VII):

$$R_f = \frac{1}{S\lambda_t} = \frac{1}{581 \cdot 0.4} = 0.004302 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica che attraversa il terreno compreso tra la superficie esterna del tubo (ovvero la superficie esterna dello strato cilindro di rivestimento) e la superficie esposta all'aria ambiente deve attraversare anche il rivestimento isolante, le pareti del tubo e l'interfaccia convettiva tra queste e il liquido. Se ne deduce che le resistenze alla conduzione termica del rivestimento e delle pareti e la resistenza convettiva lavorano in serie con la resistenza termica di forma (cfr. Es.F.VI).

La resistenza conduttiva del rivestimento isolante vale:

$$R_r = \frac{\ln[D/(D - 2 \cdot s_r)]}{2\pi \cdot \lambda_r L} = \frac{\ln[0.190/(0.190 - 2 \cdot 0.050)]}{2\pi \cdot 0.05 \cdot 325} = 0.007318 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza conduttiva delle pareti metalliche vale:

$$R_p = \frac{\ln[(d + 2 \cdot s_p)/d]}{2\pi \cdot \lambda_p L} = \frac{\ln[(0.080 + 2 \cdot 0.005)/0.080]}{2\pi \cdot 12 \cdot 325} = 0.000005 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza convettiva all'interno del tubo vale:

$$R_c = \frac{1}{\pi \cdot d L h} = \frac{1}{\pi \cdot 0.080 \cdot 325 \cdot 300} = 0.000041 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza complessiva vale quindi:

$$R = R_f + R_r + R_p + R_c = 0.01167 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In conclusione, la potenza termica persa dal tubo verso il terreno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_f - T_s)}{R} = \frac{(90 - 20)}{0.01167} = 6000 \text{ W} = 6.0 \text{ kW}$$

**ESERCIZI UNITA' G – SOMMARIO**

**G. CONDUZIONE IN REGIME NON STAZIONARIO**

**G.I. Filo di rame immerso in acqua e in aria**

**G.II. Inerzia termica di un sensore**

**G.III. Trattamento termico**

**G.IV. Riscaldamento di una bibita in lattina**

**G.V. Tempo di risposta di un sensore**

**G.VI. Tempo di risposta di un sensore (2)**

**G.VII. Monitoraggio di un processo industriale**

**G.VIII. Monitoraggio di un processo industriale (2)**

**G.I. Filo di rame immerso in acqua e in aria**

– Problema

Determinare la temperatura di un filo di rame con diametro 0.8 mm, inizialmente a 170°C, dopo 20 s e 40 s dalla sua immersione in acqua a 38°C, assumendo un valore del coefficiente di scambio termico convettivo sulla superficie del filo pari a 90 W/(m<sup>2</sup>·°C). Determinare inoltre la temperatura dello medesimo filo di rame dopo 20 s e 40 s dalla sua immersione in aria alla stessa temperatura precedentemente considerata di 38°C, assumendo in questo caso un valore del coefficiente di scambio termico convettivo superficiale pari a 12 W/(m<sup>2</sup>·°C).

Le proprietà del rame sono le seguenti: conduttività termica  $\lambda = 375 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$ , densità  $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$ , calore specifico  $c = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$ .

– Dati

- $D = 0.8 \text{ mm} = 0.0008 \text{ m}$  (diametro del filo di rame)
- $T_0 = 170^\circ\text{C}$  (temperatura iniziale del filo di rame)
- $T_\infty = 38^\circ\text{C}$  (temperatura del fluido, acqua o aria)
- $h_w = 90 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione in acqua)
- $h_a = 12 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione in acqua)
- $\lambda = 375 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica del rame)
- $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$  (densità del rame)
- $c = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$  (calore specifico del rame)

– Determinare

- $T_{20,w} = T(t = 20 \text{ s}), T_{40,w} = T(t = 40 \text{ s})$  (in acqua)
- $T_{20,a} = T(t = 20 \text{ s}), T_{40,a} = T(t = 40 \text{ s})$  (in aria)

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee ed indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti d'estremità trascurabili, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

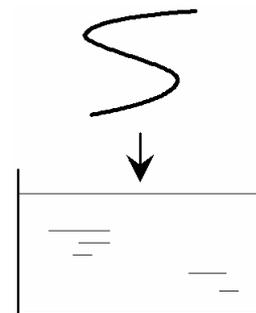
– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel filo durante il transitorio termico, occorre stimare il numero di Biot. A tal scopo, è necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, data dal rapporto tra volume di materiale interessato ed area della superficie di scambio termico. Nel caso in esame, assegnando al filo una generica lunghezza L (in effetti non nota), si ottiene che la lunghezza caratteristica del filo,  $L_c$ , vale:

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{(\pi D^2/4)L}{\pi DL} = \frac{D}{4} = 0.0002 \text{ m}$$

Si sono trascurati gli scambi termici sulle due superfici di estremità del filo, ipotesi ragionevole in virtù del rapporto verosimilmente elevato tra diametro e lunghezza del filo stesso.

Il numero di Biot nel caso di immersione in acqua vale



$$Bi_w = \frac{h_w L_c}{\lambda} = \frac{90 \cdot 0.0002}{375} = 4.8 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

mentre, nel caso di immersione in aria, vale

$$Bi_a = \frac{h_a L_c}{\lambda} = \frac{12 \cdot 0.0002}{375} = 6.4 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

In entrambe le situazioni, il valore calcolato è molto minore dell'unità, il che consente di ritenere accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nel filo. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati, impiegando la relazione:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-t/t_c}$$

Nella relazione compare un tempo caratteristico  $t_c$  del problema, che vale, nel caso di immersione in acqua,

$$t_c = \frac{\rho c V}{h_w A} = \frac{\rho c L_c}{h_w} = \frac{8940 \cdot 380 \cdot 0.0002}{90} = 7.5 \text{ s}$$

mentre, nel caso di immersione in aria, vale

$$t_c = \frac{\rho c L_c}{h_a} = \frac{8940 \cdot 380 \cdot 0.0002}{12} = 56.6 \text{ s}$$

Infine, la temperatura del filo di rame agli istanti considerati vale, in acqua

$$T_{20,w} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-20/t_{c,w}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-20/7.5} = 47.3 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{40,w} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-40/t_{c,w}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-40/7.5} = 38.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

e in aria

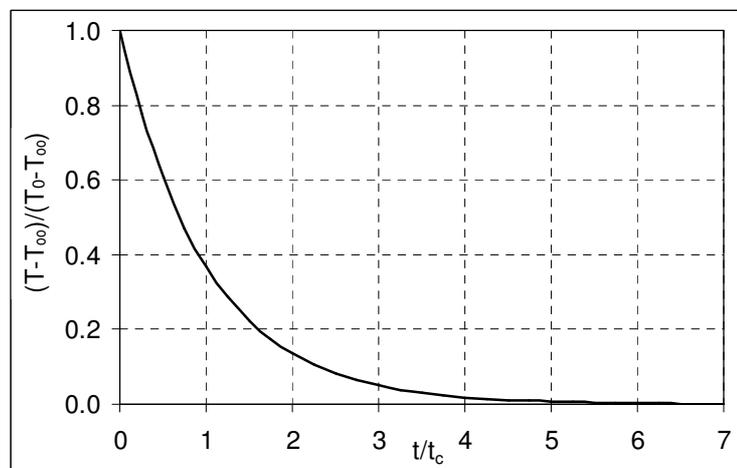
$$T_{20,a} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-20/t_{c,a}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-20/56.6} = 130.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{40,w} = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-40/t_{c,a}} = 38 + (170 - 38) \cdot e^{-40/56.6} = 103.1 \text{ }^\circ\text{C}$$

- Commenti

Il filo di rame potrebbe essere quello di una termocoppia (ad esempio, del tipo rame-costantana o ferro-costantana), che presenta quindi un ritardo nella risposta non trascurabile, specialmente se impiegata per misure di temperatura in aria.

Il tempo caratteristico  $t_c$  è quello in cui la differenza di temperatura tra corpo immerso e fluido scende ad una frazione pari ad  $1/e$  ( $\approx 37\%$ ) del suo valore iniziale. Dopo un tempo pari a tre volte e cinque volte  $t_c$ , la differenza di temperatura scende, rispettivamente, al 5% e all'1% del valore iniziale (vedi grafico a lato).



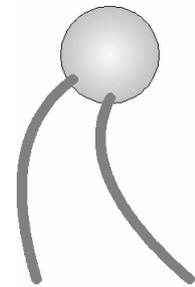
**G.II. Inerzia termica di un sensore**

– Problema

La giunzione di una termocoppia per misure di temperatura in aria è essenzialmente costituita da una sfera di saldatura con diametro 1.8 mm in lega metallica bassofondente. La lega metallica presenta conduttività termica 60 W/(m·°C), densità 7500 kg/m<sup>3</sup> e calore specifico 240 J/(kg·°C). Se la giunzione di misura della termocoppia, inizialmente a 25°C, viene immersa in una corrente d'aria calda a 250°C, determinare dopo quanto tempo la temperatura misurata differirà da quella della corrente d'aria calda per meno di 2°C. A tal scopo, si trascuri la presenza dei fili della termocoppia e si assuma un coefficiente di convezione pari a 30 W/(m<sup>2</sup>·°C).

– Dati

- D = 1.8 mm = 0.0018 m (diametro della giunzione di misura)
- T<sub>0</sub> = 25°C (temperatura iniziale della giunzione)
- T<sub>∞</sub> = 250°C (temperatura della corrente d'aria calda)
- ΔT = 2°C (differenza di temperatura finale)
- λ = 60 W/(m·°C) (conduttività termica del materiale di saldatura)
- ρ = 7500 kg/m<sup>3</sup> (densità del materiale di saldatura)
- c = 240 J/(kg·°C) (calore specifico del materiale di saldatura)
- h = 30 W/(m<sup>2</sup>·°C) (coefficiente di convezione)



– Determinare

- Δt (tempo per raggiungere la massima differenza di temperatura ammessa)

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti dei fili della termocoppia trascurabili, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nella giunzione sferica durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale:

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{D}{6} = 0.0003 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i fili della termocoppia e le loro superfici. Il numero di Biot vale quindi:

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{30 \cdot 0.0003}{60} = 1.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Poiché  $Bi$  è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nella giunzione sferica. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati.

Il tempo caratteristico del problema,  $t_c$ , vale:

$$t_c = \frac{\rho c V}{hA} = \frac{\rho c L_c}{h} = \frac{7500 \cdot 240 \cdot 0.0003}{30} = 18 \text{ s}$$

La temperatura misurata dal sistema di acquisizione dati a cui è collegata la termocoppia è quella della giunzione sferica. Una volta che tale giunzione viene immersa nella corrente d'aria da monitorare, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma aumenta a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura dell'aria. Stabilita la deviazione  $\Delta T$  massima ammissibile della misura dal valore reale (in questo caso pari a  $2^\circ\text{C}$ ), il tempo di risposta  $\Delta t$  che si vuole stimare è quello in cui la giunzione di misura raggiunge una temperatura pari a:

$$T_m = T_\infty - \Delta T = 250 - 2 = 248 \text{ }^\circ\text{C}$$

La stima si può effettuare esplicitando  $\Delta t$  nella relazione seguente:

$$T_m = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Si ottiene così:

$$\Delta t = -t_c \ln\left(\frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -18 \cdot \ln\left(\frac{248 - 250}{25 - 250}\right) = 85 \text{ s}$$

– Commenti

Il tempo di risposta è largamente superiore al minuto. La termocoppia considerata è sicuramente poco adatta a monitorare transitori termici veloci.

**G.III. Trattamento termico**

– Problema

Un semilavorato in rame con massa 320 g e superficie esterna  $45 \text{ cm}^2$ , inizialmente a  $800^\circ\text{C}$ , viene sottoposto ad un trattamento termico che prevede un rapido raffreddamento mediante immersione in una vasca di olio, in cui la temperatura è stabilizzata a  $20^\circ\text{C}$ . Determinare il coefficiente di convezione minimo da realizzare, ad esempio mediante agitazione dell'olio, per abbassare di  $650^\circ\text{C}$  in un minuto la temperatura del semilavorato.

Le proprietà del rame sono le seguenti: conduttività termica  $\lambda = 375 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ , densità  $\rho = 8940 \text{ kg}/\text{m}^3$ , calore specifico  $c = 380 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ .

– Dati

- $m = 320 \text{ g} = 0.320 \text{ kg}$  (massa del semilavorato in rame)
- $A = 45 \text{ cm}^2 = 0.0045 \text{ m}^2$  (superficie esposta del semilavorato)
- $T_0 = 800^\circ\text{C}$  (temperatura iniziale del semilavorato)
- $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  (temperatura dell'olio)
- $\Delta T = 650^\circ\text{C}$  (variazione di temperatura nel raffreddamento)
- $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$  (tempo di raffreddamento)

- $\lambda = 375 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica del rame)
- $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$  (densità del rame)
- $c = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$  (calore specifico del rame)

– Determinare

- $h$  (coefficiente di convezione)

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Poiché il coefficiente di convezione è incognito, non è possibile procedere ad una valutazione preliminare del numero di Biot. Tuttavia, si può ipotizzare ammissibile uno studio a parametri concentrati e verificare a posteriori la validità di tale ipotesi.

Il coefficiente di convezione è incluso nel tempo caratteristico del problema,  $t_c$ , che si può stimare esplicitandolo nella relazione:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Considerando che la temperatura al termine del raffreddamento,  $T_r$ , vale:

$$T_r = T_0 - \Delta T = 800 - 650 = 150 \text{ °C}$$

si ottiene

$$t_c = -\frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{T_r - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)} = -\frac{60}{\ln\left(\frac{150 - 20}{800 - 20}\right)} = 33.5 \text{ s}$$

Per determinare il coefficiente di convezione a partire da  $t_c$ , è poi necessario calcolare il volume del semilavorato è, quindi, la lunghezza caratteristica del problema:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.320}{8940} = 3.58 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$L_c = \frac{V}{A} = 7.95 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Si ricava così che il coefficiente di convezione minimo da realizzare vale:

$$h = \frac{\rho c L_c}{t_c} = \frac{8940 \cdot 380 \cdot 7.95 \cdot 10^{-3}}{33.5} = 807 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

È infine necessario verificare la validità dello studio a parametri concentrati:

$$Bi = \frac{h L_c}{\lambda} = \frac{807 \cdot 7.95 \cdot 10^{-3}}{375} = 0.031 \ll 1$$

– Commenti

Il coefficiente di convezione richiesto, seppure elevato, può essere conseguito con relativa facilità in un liquido.

**G.IV. Riscaldamento di una bibita in lattina**

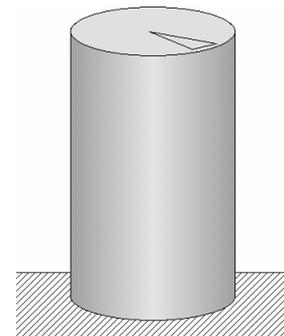
– Problema

Una lattina cilindrica, riempita per il 93% di una bibita a base acqua, presenta diametro 63 mm ed altezza 114 mm. Stimare approssimativamente per quanto tempo la bibita, dopo essere stata prelevata da un frigorifero a 9°C ed appoggiata verticalmente su un tavolo posto in un ambiente a 30°C, si mantiene ad una temperatura inferiore a quella massima gradevole, assunta pari a 15°C.

Il valore del coefficiente di convezione superficiale si può valutare pari a 5 W/(m<sup>2</sup>·°C). Al liquido, che rimane fermo nella lattina e può essere perciò assimilato ad una sostanza solida, si possono attribuire le proprietà termofisiche dell'acqua alla temperatura considerata: conduttività termica  $\lambda = 0.59$  W/(m·°C), densità  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, calore specifico  $c = 4190$  J/(kg·°C). Volume e capacità termica del recipiente metallico sono trascurabili in virtù del ridottissimo spessore di parete.

– Dati

- D = 63 mm = 0.063 m (diametro della lattina)
- H = 114 mm = 0.114 m (altezza della lattina)
- C<sub>r</sub> = 93% = 0.93 (coefficiente di riempimento in volume)
- T<sub>0</sub> = 9°C (temperatura iniziale della bibita)
- T<sub>∞</sub> = 30°C (temperatura ambiente)
- T<sub>max</sub> = 15°C (temperatura massima gradevole)
- $\lambda = 0.59$  W/(m·°C) (conduttività termica dell'acqua)
- $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> (densità dell'acqua)
- c = 4190 J/(kg·°C) (calore specifico dell'acqua)
- h = 5 W/(m<sup>2</sup>·°C) (coefficiente di convezione)



– Determinare

- t<sub>r</sub> (tempo per raggiungere la massima temperatura gradevole)

– Ipotesi

Liquido fermo, proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti radiativi trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo, capacità termica del recipiente metallico trascurabile, superficie inferiore termicamente isolata.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nella lattina durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario calcolare il volume del liquido, la superficie esposta all'aria della lattina e, quindi, la lunghezza caratteristica del problema.

Il volume del liquido vale:

$$V = C_r \pi \frac{D^2}{4} H = 0.93 \cdot \pi \cdot \frac{0.063^2}{4} \cdot 0.114 = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 33 \text{ cl}$$

Dato il loro piccolo spessore, si è trascurata la presenza delle pareti metalliche del recipiente.

Nel calcolo della superficie su cui hanno luogo gli scambi termici convettivi, si può assumere che la base di appoggio della lattina sia termicamente isolata. Si potrebbe considerare tale anche la superficie superiore, sotto la quale il gas contenuto nel recipiente (7% in volume) va a raccogliersi e a formare uno strato stagnante a ridotta conducibilità termica, ma, nel caso in esame trascurare l'effetto isolante dell'aria permette di operare in favore di sicurezza (sovrastimando la superficie di scambio, si sovrastima infatti anche la velocità di raffreddamento). In definitiva, la superficie di scambio vale:

$$A \cong \pi \frac{D^2}{4} + \pi DH = \pi \frac{0.063^2}{4} + \pi \cdot 0.063 \cdot 0.114 = 0.0257 \text{ m}^2$$

La lunghezza caratteristica del problema ed il numero di Biot valgono:

$$L_c = \frac{V}{A} = 0.0129 \text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{5 \cdot 0.0129}{0.59} = 0.11$$

Bi è minore dell'unità, ma non del valore limite sotto il quale si assumono generalmente valide le analisi a parametri concentrati, pari a 0.1. Si può tuttavia pensare di procedere ugualmente nello studio, in virtù del fatto che non si è molto distanti dal suddetto valore limite e che, comunque, si vuole effettuare solo una stima approssimativa del tempo di riscaldamento.

Il tempo caratteristico del problema,  $t_c$ , vale:

$$t_c = \frac{\rho c L_c}{h} = \frac{1000 \cdot 4190 \cdot 0.0129}{5} = 10785 \text{ s}$$

Il periodo di tempo  $\Delta t$  durante il quale la temperatura si mantiene sotto il valore considerato massimo gradevole si può effettuare esplicitandolo nella relazione:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \cdot e^{-\Delta t/t_c}$$

Si ottiene così:

$$\Delta t = -t_c \ln \left( \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right) = -10785 \cdot \ln \left( \frac{15 - 30}{9 - 30} \right) = 3629 \text{ s} \cong 60 \text{ min}$$

– Commenti

In realtà, il coefficiente di convezione esterno è stato leggermente sottostimato.

Si può agevolmente verificare che la presenza del recipiente metallico della bibita è pressoché ininfluenza. Infatti, assumendo che il recipiente sia realizzato in lega di alluminio, con conducibilità termica  $170 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ , densità  $2790 \text{ kg}/\text{m}^3$  e calore specifico  $880 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , e che presenti una massa pari a 30 g, la sua capacità termica rappresenta una frazione della capacità termica del liquido valutabile mediante il rapporto:

$$\frac{\rho_{Al} c_{Al} V_{Al}}{\rho c V} \cong \frac{c_{Al} m_{Al}}{\rho c V} = \frac{880 \cdot 0.020}{1000 \cdot 4190 \cdot 3.3 \cdot 10^{-4}} = 0.019 < 2\%$$

Inoltre, assumendo uno spessore  $s_{Al}$  della parete del recipiente pari a 0.4 mm ed un coefficiente di scambio termico convettivo lato liquido,  $h_{liquido}$ , pari a circa  $100 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , si ottiene un coefficiente globale di scambio tra liquido e aria pari a:

$$h_{globale} = \frac{1}{1/h + s_{Al}/k_{Al} + 1/h_{liquido}} = 4.8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}) \approx 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

**G.V. Tempo di risposta di un sensore**

– Problema

Si stimi il tempo di risposta  $t_{99}$  di un sensore per misure di temperature in aria, inteso come il tempo dall'immersione del sensore nella corrente d'aria monitorata dopo il quale la differenza di temperatura tra sensore e aria si è ridotta all'1% del valore iniziale. Il sensore è costituito da un sfera con diametro 1.2 mm, realizzata in un materiale con conduttività termica 120 W/(m·°C), densità 4500 kg/m<sup>3</sup> e calore specifico 750 J/(kg·°C). Inoltre, il coefficiente di adduzione (ovvero il coefficiente di scambio termico inclusivo degli effetti convettivi e radiativi) sulla superficie del sensore è pari a 90 W/(m<sup>2</sup>·°C).

– Dati

- D = 1.2 mm = 0.0012 m (diametro della sfera)
- $\lambda = 120$  W/(m·°C) (conduttività termica)
- $\rho = 4500$  kg/m<sup>3</sup> (densità massica)
- $c = 750$  J/(kg·°C) (calore specifico)
- $h_{TOT} = 90$  W/(m<sup>2</sup>·°C) (coefficiente di adduzione)
- $\Delta T_{99}/\Delta T_0 = 1\% = 0.01$  (definizione)

– Determinare

Tempo di risposta  $t_{99}$

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di adduzione uniforme, effetti degli eventuali fili di connessione del sensore trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3}{4\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{D}{6} = 0.0002 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i (necessariamente presenti) fili del sensore e le loro superfici esposte. Il numero di Biot vale quindi:

$$Bi = \frac{h_{TOT} L_c}{\lambda} = \frac{90 \cdot 0.0002}{120} = 1.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Si noti che con il coefficiente di adduzione  $h_{TOT}$  si integrano in una sola grandezza i fenomeni di convezione e irraggiamento. Poiché Bi è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati.

Il tempo caratteristico del problema,  $t_c$ , vale:

$$t_c = \frac{\rho c V}{h_{TOT} A} = \frac{\rho c L_c}{h_{TOT}} = \frac{4500 \cdot 750 \cdot 0.0002}{90} = 7.5 \text{ s}$$

Una volta che il sensore viene immerso nella corrente d'aria, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma aumenta a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura dell'aria. Data la differenza di temperatura massima ammissibile tra sensore e corrente d'aria, pari all'1% del valore iniziale (a cui corrisponde un abbattimento pari al 99% della differenza iniziale), il tempo di risposta che si vuole stimare è quello per cui si ha (vedi Es.G.II)

$$\Delta T_{99} / \Delta T_0 = e^{-t_{99}/t_c}$$

ovvero

$$t_{99} = -t_c \ln(\Delta T_{99} / \Delta T_0) = -7.5 \cdot \ln(0.01) = 35.5 \text{ s}$$

– Commenti

Dalla definizione del tempo di risposta si può desumere che esso è indipendente dalle temperature in gioco, ma solo se non si hanno variazioni né delle proprietà termofisiche dei materiali (ragionevole per escursioni di temperatura non troppo ampie), né del coefficiente di scambio termico superficiale (ragionevole, con qualche cautela in più, per escursioni di temperatura ridotte e condizioni di lavoro ben definite e facilmente ripetibili come, ad esempio, l'immersione del sensore in aria o in un liquido in quiete).

**G.VI. Tempo di risposta di un sensore (2)**

– Problema

Si stimi il tempo di risposta  $t_{999}$  di un sensore per misure di temperatura in liquido, inteso come il tempo dall'immersione del sensore nel liquido dopo il quale la differenza di temperatura tra i due si è ridotta all'1‰ (uno per mille) del valore iniziale. Il sensore è costituito da una piastrina con dimensioni 2 mm x 2 mm x 0.5 mm, realizzata in un materiale con conduttività termica 2.5 W/(m·°C), densità 1800 kg/m<sup>3</sup> e calore specifico 850 J/(kg·°C). Inoltre, il coefficiente di convezione sulla superficie del sensore si può stimare pari a 40 W/(m<sup>2</sup>·°C).

– Dati

- $L_1 = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$  (dimensione del sensore)
- $L_2 = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$  (dimensione del sensore)
- $L_3 = 0.5 \text{ mm} = 0.0005 \text{ m}$  (spessore)
- $\lambda = 2.5 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$  (conduttività termica)
- $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$  (densità massica)
- $c = 850 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$  (calore specifico)
- $h = 40 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$  (coefficiente di convezione)
- $\Delta T_{999} / \Delta T_0 = 1\text{‰} = 0.001$  (definizione)

– Determinare

Tempo di risposta  $t_{999}$

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, effetti degli eventuali fili di connessione del sensore trascurabili, tempo di immersione pressoché nullo.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante il transitorio occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{L_1 L_2 L_3}{2 \cdot (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} = 0.000167 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i (necessari) fili del sensore e le loro superfici esposte. Il numero di Biot vale quindi:

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{40 \cdot 0.000167}{2.5} = 0.00267 \ll 1$$

Poiché Bi è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati.

Il tempo caratteristico del problema,  $t_c$ , vale:

$$t_c = \frac{\rho c L_c}{h} = \frac{1800 \cdot 850 \cdot 0.000167}{40} = 6.38 \text{ s}$$

Una volta che il sensore viene immerso nel liquido, la sua temperatura varia a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura del liquido. Data la differenza di temperatura massima ammissibile tra sensore e liquido, pari all'uno per mille del valore iniziale (a cui corrisponde un abbattimento pari al 999‰ della differenza iniziale), il tempo di risposta che si vuole stimare è quello per cui si ha (vedi Es.G.II)

$$\Delta T_{999} / \Delta T_0 = e^{-t_{999}/t_c}$$

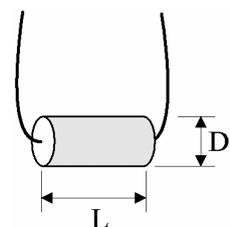
ovvero

$$t_{999} = -t_c \cdot \ln(\Delta T_{999} / \Delta T_0) = -6.38 \cdot \ln(0.001) = 44 \text{ s}$$

**G.VII. Monitoraggio di un processo industriale**

– Problema

Un sensore come in figura, caratterizzato da  $L = 20 \text{ mm}$ ,  $D = 4 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 5.2 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$ ,  $c = 1800 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$  e  $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$ , serve a monitorare le temperature in un processo industriale. Il sensore viene ciclicamente estratto da una sostanza alimentare con una temperatura inizialmente uguale a quella della sostanza stessa, pari a  $85 \text{ °C}$ , e lasciato esposto per circa 4 min all'aria ambiente a  $31 \text{ °C}$ , con coefficiente di adduzione pari a  $12 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$ , quindi viene immerso di nuovo nella sostanza, in cui si ha un coefficiente di convezione  $90 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$ .



Determinare la temperatura del sensore immediatamente prima di essere immerso nella sostanza. Determinare inoltre il tempo dall'immersione dopo il quale si ha:

$$|T_{\text{sensore}} - T_{\text{sostanza}}| < 1^\circ\text{C}$$

– Dati

- $L = 20 \text{ mm} = 0.020 \text{ m}$  (sviluppo longitudinale del sensore)
- $D = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m}$  (diametro del sensore)
- $\lambda = 5.2 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$  (conduttività termica)
- $c = 1800 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$  (calore specifico)
- $\rho = 1500 \text{ kg}/\text{m}^3$  (densità massica)
- $T_1 = T_{\text{sost}} = 85^\circ\text{C}$  (temperatura della sostanza alimentare)
- $T_a = 31^\circ\text{C}$  (temperatura dell'aria)
- $t_{12} = 4 \text{ min} = 240 \text{ s}$  (tempo di esposizione all'aria)
- $h_{12} = 12 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$  (coefficiente di adduzione in aria)
- $\Delta T = |T_3 - T_{\text{sost}}| \leq 1^\circ\text{C}$  (vedi testo)
- $h_{23} = 90 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione in liquido)

– Determinare

Temperatura  $T_2$  del sensore dopo un tempo  $t_{12}$  di esposizione all'aria dopo l'estrazione dalla sostanza alimentare

Tempo  $t_{23}$  dopo l'immersione nella sostanza alimentare necessario a che si raggiunga una differenza di temperatura tra sostanza e sensore inferiore a  $\Delta T$

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico uniformi, effetti degli eventuali fili di connessione del sensore trascurabili, tempi di estrazione e di immersione pressoché nulli.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nel sensore durante i transitori occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} \cong \frac{\pi \cdot (D/2)^2 H}{\pi \cdot DH + 2\pi \cdot (D/2)} = \frac{D}{6} = 0.00091 \text{ m}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i fili del sensore (necessariamente presenti) e le loro superfici esposte, mentre si sono tenute in considerazione le due superfici circolari di estremità. Il numero di Biot nel primo transitorio vale quindi:

$$Bi_{12} = \frac{h_{12} L_c}{\lambda} = \frac{12 \cdot 0.00091}{5.2} = 0.0021 \ll 1$$

Poiché  $Bi_{12}$  è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nel sensore. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati. Il tempo caratteristico del problema,  $t_{c,12}$ , vale:

$$t_{c,12} = \frac{\rho c L_c}{h_{12}} = \frac{1500 \cdot 1800 \cdot 0.00091}{12} = 205 \text{ s}$$

Una volta che il sensore viene estratto dalla sostanza alimentare e lasciato esposto all'aria, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma diminuisce a poco a poco, fino a portarsi

asintoticamente alla temperatura dell'aria. La sua temperatura dopo un tempo  $t_{12}$  è valutabile mediante la relazione:

$$T_2 = T_a + (T_1 - T_a) \cdot e^{-\frac{t_{12}}{t_{c,12}}} = 47.7^\circ\text{C}$$

A questo punto il sensore viene nuovamente immerso nella sostanza alimentare e la sua temperatura aumenta a poco a poco, fino a portarsi asintoticamente alla temperatura  $T_s$  della sostanza stessa. Il numero di Biot in questo secondo transitorio vale:

$$Bi_{23} = \frac{h_{23}L_c}{\lambda} = \frac{90 \cdot 0.00091}{5.2} = 0.0157 \ll 1$$

Anche in questo caso, poiché  $Bi_{23}$  è molto minore dell'unità, è accettabile l'ipotesi di uniformità della temperatura nel sensore. È quindi possibile studiare il problema a parametri concentrati. Il tempo caratteristico del problema,  $t_{c,23}$ , vale:

$$t_{c,23} = \frac{\rho c L_c}{h_{23}} = \frac{1500 \cdot 1800 \cdot 0.00091}{90} = 27 \text{ s}$$

Data la differenza di temperatura massima ammissibile tra sensore e corrente d'aria, pari a  $1^\circ\text{C}$ , il tempo di risposta che si vuole stimare è quello per cui la temperatura del sensore, che aumenta progressivamente, raggiunge un valore:

$$T_3 = T_s - \Delta T = 84^\circ\text{C}$$

In conclusione, si ha che

$$\frac{T_3 - T_s}{T_2 - T_s} \equiv \frac{\Delta T}{T_s - T_2} = e^{-t_{23}/t_{c,23}}$$

ovvero

$$t_{23} = -t_{c,23} \cdot \ln\left(\frac{T_3 - T_s}{T_2 - T_s}\right) = 98.7 \text{ s}$$

– Commenti

La stima coefficiente di convezione è tipicamente ottenuta tramite relazioni empiriche che presentano un margine di incertezza sul valore stimato raramente è inferiore al 20%. Di ciò va tenuto debitamente conto nei calcoli tecnici, ad esempio adottando opportuni coefficienti di sicurezza.

**G.VIII. Monitoraggio di un processo industriale (2)**

– Problema

Un dispositivo elettronico con volume e massa ridottissimi è posto in un ambiente a temperatura  $40^\circ\text{C}$ , in cui può essere di tanto in tanto investito, per un periodo di tempo mai superiore a un minuto, da un getto di vapore a temperatura  $120^\circ\text{C}$ . A causa di ciò, si rende necessario aumentare l'inerzia termica del dispositivo inglobandolo in una sfera di acciaio ( $\lambda = 16.5 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ ,  $c = 500 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$ ).

Assumendo che l'insieme sia inizialmente a temperatura ambiente e stimando che il coefficiente di convezione sulla superficie della sfera, quando questa è investita dal vapore,

sia pari a  $80 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , calcolare il diametro minimo che la sfera deve avere perché il dispositivo in essa inglobato non superi mai la sua temperatura massima ammissibile, pari a  $60^\circ\text{C}$ . Inoltre, stimare in quanto tempo, dopo che il getto di vapore si è interrotto, la temperatura dell'insieme dispositivo/sfera scende dal massimo ammissibile ad un valore che non si scosti per più di  $0.5^\circ\text{C}$  dal valore ambiente, stimando in tal caso un coefficiente di scambio termico superficiale pari a  $15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ .

– Dati

- $T_1 = T_{\text{amb}} = 40^\circ\text{C}$  (temperatura ambiente e iniziale)
- $T_v = 120^\circ\text{C}$  (temperatura del vapore)
- $t_{12} = t_{v,\text{max}} = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$  (tempo di massima esposizione ad un getto di vapore)
- $\lambda = 16.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$  (conduttività termica)
- $c = 500 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$  (calore specifico)
- $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$  (densità masicca)
- $h_{12} = 80 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di convezione durante l'esposizione al getto)
- $T_2 = T_{s,\text{max}} = 60^\circ\text{C}$  (temperatura massima ammissibile)
- $\Delta T = |T_3 - T_{\text{amb}}| = |T_3 - T_1| \leq 0.5^\circ\text{C}$  (vedi testo)
- $h_{23} = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  (coefficiente di scambio termico in aria)

– Determinare

Diametro  $D$  dell'involucro sferico atto ad impedire che il dispositivo superi la massima temperatura ammessa durante un getto di vapore di durata massima

Tempo  $t_{23}$  per scendere ad una differenza di temperatura  $\Delta T$  da valore ambiente dopo la fine di un getto di vapore di durata massima

– Ipotesi

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficienti di scambio termico convettivo uniformi, effetti degli eventuali fili di connessione del dispositivo trascurabili.

– Soluzione

Per verificare se si può assumere uniforme la temperatura nell'insieme dispositivo/sfera durante i transitori, occorre stimare il numero di Biot. È a tal scopo necessario valutare la lunghezza caratteristica del problema, che nel caso in esame vale (vedi Es.G.II):

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{(4/3)\pi \cdot (D/2)^3}{4\pi \cdot (D/2)^2} = \frac{D}{6}$$

Si sono trascurati, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso i (necessariamente presenti) fili del dispositivo e le loro superfici esposte e, per ipotesi, la massa termica del dispositivo stesso, inglobato all'interno della sfera.

Il diametro della sfera è incognito, ma si può ipotizzare che il numero di Biot assuma un valore accettabile ed effettuare una verifica di tale ipotesi a posteriori.

Una volta che l'insieme dispositivo/sfera viene investito dal getto di vapore, la sua temperatura non varia istantaneamente, ma aumenta a poco a poco, e tende asintoticamente alla temperatura del vapore. Perché essa non superi il valore massimo ammesso prima di un

periodo temporale  $t_{12}$  (quello di massima durata di un getto di vapore), il tempo caratteristico  $t_{c,12}$  deve essere tale che:

$$T_2 = T_v + (T_1 - T_v) \cdot e^{-\frac{t_{12}}{t_{c,12}}} = 60^\circ\text{C}$$

ovvero

$$t_{c,12} = -t_{12} \cdot \ln\left(\frac{T_2 - T_v}{T_1 - T_v}\right) = 209 \text{ s}$$

Il tempo caratteristico è definito come segue:

$$t_{c,12} = \frac{\rho c L_c}{h_{12}} \equiv \frac{\rho c D}{6 \cdot h_{12}}$$

Pertanto, per impedire che il dispositivo superi la massima temperatura ammessa durante un getto di vapore di durata massima, la sfera deve presentare diametro pari a:

$$D = \frac{6 \cdot h_{12} t_{c,12}}{\rho c} = \frac{6 \cdot 80 \cdot 209}{7800 \cdot 500} = 0.0257 \text{ m} = 25.7 \text{ mm}$$

Il numero di Biot nel transitorio vale:

$$Bi_{12} = \frac{h_{12} L_c}{\lambda} = \frac{h_{12} D}{6 \cdot \lambda} = \frac{80 \cdot 0.0257}{6 \cdot 16.5} = 0.0207 < 0.1$$

Poiché  $Bi_{12}$  è molto minore dell'unità, l'ipotesi di uniformità della temperatura nella sfera è accettabile. Pertanto, i risultati ottenuti mediante analisi a parametri concentrati sono da ritenersi attendibili.

Avendo dimensionato la sfera come precedentemente illustrato, l'insieme dispositivo-sfera, dopo essere stato investito da un getto di vapore di durata massima, si troverà a temperatura pari alla massima ammissibile. Per stimare la durata del successivo raffreddamento in aria, è preliminarmente necessario verificare se il valore assunto dal numero di Biot (diverso dal precedente in quanto cambia il coefficiente di scambio termico superficiale) consente ancora un'analisi a parametri concentrati:

$$Bi_{23} = \frac{h_{23} L_c}{\lambda} = \frac{h_{23} D}{6 \cdot \lambda} = \frac{15 \cdot 0.0257}{6 \cdot 16.5} = 0.0039 \ll 1$$

Il risultato era peraltro ovvio, in quanto il coefficiente di scambio termico in aria è molto minore di quello in vapore. Nella fase di raffreddamento, il tempo caratteristico del problema,  $t_{c,23}$ , vale:

$$t_{c,23} = \frac{\rho c L_c}{h_{23}} = \frac{\rho c D}{6 \cdot h_{23}} = \frac{7800 \cdot 500 \cdot 0.0257}{6 \cdot 15} = 1112.3 \text{ s}$$

Avendo stabilito che il raffreddamento si può considerare completato quando la differenza di temperatura massima ammissibile tra insieme dispositivo-sfera e aria ambiente scende sotto un valore di soglia  $\Delta T = 0.5^\circ\text{C}$ , il tempo di raffreddamento che si vuole stimare è quello per cui:

$$T_3 = T_a + \Delta T \equiv T_1 + \Delta T = 40.5 \text{ }^\circ\text{C}$$

In conclusione, si ottiene che

$$\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\Delta T}{T_2 - T_1} = e^{-t_{23}/t_{c,23}}$$

ovvero

$$t_{23} = -t_{c,23} \cdot \ln\left(\frac{\Delta T}{T_2 - T_1}\right) = -1112.3 \cdot \ln\left(\frac{0.5}{60 - 40}\right) = 4103 \text{ s} \cong 68 \text{ min}$$

**ESERCIZI UNITA' J – SOMMARIO**

**J. SCAMBIATORI DI CALORE**

**J.I. Scambiatore aria-CO<sub>2</sub> tubo in tubo in controcorrente ( $\Delta T_{ml}$ )**

**J.II. Scambiatore di calore olio-aria a flussi incrociati non mescolati ( $\Delta T_{ml}$ )**

**J.III. Scambiatore acqua-olio a tubi coassiali in controcorrente ( $\epsilon$ -NTU)**

**J.IV. Scambiatore esterno di un dissipatore a liquido per microprocessore ( $\epsilon$ -NTU)**

**J.I. Scambiatore aria-CO<sub>2</sub> tubo in tubo in controcorrente ( $\Delta T_{ml}$ )**

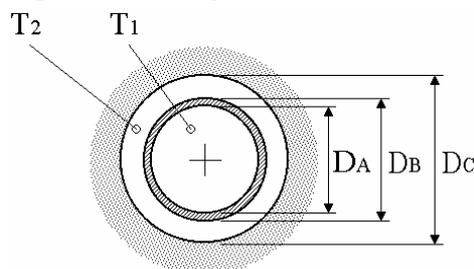
Problema

Si consideri uno scambiatore del tipo tubo in tubo in controcorrente. Nel tubo interno, metallico, con diametro interno 75 mm ed esterno 80 mm, scorre una portata d'aria pari a 100 kg/ora, che entra a 20°C ed esce a 74°C. Nel tubo esterno, a sezione anulare con diametro esterno 100 mm, fluisce una portata di 144 kg/ora di anidride carbonica, che entra con temperatura 295°C.

Determinare la temperatura in uscita dell'anidride carbonica e la lunghezza dello scambiatore.

Dati

- Tipo di scambiatore: tubo in tubo (1 passaggio) in controcorrente
- $D_A = 75 \text{ mm} = 0.075 \text{ m}$  (diametro interno del tubo interno)
- $D_B = 80 \text{ mm} = 0.080 \text{ m}$  (diametro esterno del tubo interno)
- $D_C = 100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$  (diametro esterno della sezione anulare)
- $\dot{m}_1 = 100 \text{ kg/ora} = 0.0278 \text{ kg/s}$  (portata in massa del fluido 1, aria)
- $T_{1,i} = 20^\circ\text{C}$  (temperatura in ingresso del fluido 1)
- $T_{1,u} = 74^\circ\text{C}$  (temperatura in uscita del fluido 1)
- $\dot{m}_2 = 144 \text{ kg/ora} = 0.0400 \text{ kg/s}$  (portata in massa del fluido 2, CO<sub>2</sub>)
- $T_{2,i} = 295^\circ\text{C}$  (temperatura in ingresso del fluido 2)



Determinare

- $T_{2,u}$  (temperatura in uscita del fluido 2)
- $L$  (lunghezza dei tubi dello scambiatore)

Ipotesi

Regime stazionario, effetti radiativi trascurabili, mantello esterno adiabatico, resistenza della parete del tubo trascurabile, superfici di scambio non incrostate, sporco e incrostazioni trascurabili

Soluzione

In primo luogo, è necessario determinare la temperatura a cui valutare le proprietà dei fluidi. A tal scopo, si può fare riferimento alla temperatura media dei fluidi nello scambiatore; per il fluido 1 (aria) si ha che:

$$T_{1,m} = \frac{T_{1,i} + T_{1,u}}{2} = 47^\circ\text{C} \equiv 320 \text{ K}$$

A questa temperatura si ricavano dalle relative tabelle (riportate in appendice ai manuali) i valori delle proprietà dell'aria, tabulati di seguito.

Aria a $T = 47^{\circ}\text{C} = 320\text{ K}$		
$v_1$	$1.94 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}^2/\text{s}$
$\lambda_1$	0.0275	$\text{W}/(\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C})$
$\rho_1$	1.110	$\text{kg}/\text{m}^3$
$c_{p1}$	1006	$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$
$Pr_1$	0.710	--

Per il fluido 2 (anidride carbonica) si può fare inizialmente riferimento alla temperatura in ingresso:

$$T_{2,m} \text{ (prima approssimazione)} = 295^{\circ}\text{C} \equiv 568\text{ K}$$

Poiché la temperatura media sarà in realtà più bassa di quella a cui il fluido 2, che si raffredda, entra nel tubo, si possono in prima approssimazione impiegare i valori delle proprietà tabulate per il primo valore di temperatura immediatamente inferiore a quello in ingresso. Ad esempio, se sono disponibili i valori delle proprietà a 550 K e a 600 K, ma non a temperature intermedie, si utilizzano quelli alla temperatura più bassa. Si noti che, se il fluido si riscaldasse, sarebbe invece opportuno impiegare i valori delle proprietà tabulate per il primo valore di temperatura immediatamente superiore a quello in ingresso.

Le proprietà dell'anidride carbonica a 550 K sono riportate di seguito.

Anidride carbonica a $T = 550\text{ K}$		
$v_2$	$2.54 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}^2/\text{s}$
$\lambda_2$	0.0363	$\text{W}/(\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C})$
$\rho_2$	0.976	$\text{kg}/\text{m}^3$
$c_{p2}$	1049	$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$
$Pr_2$	0.734	--

La potenza termica scambiata sarà tale che:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1} (T_{1,u} - T_{1,i}) = 1509\text{ W}$$

Si ha peraltro che, se il mantello dello scambiatore di calore (la parete del tubo esterno) può essere considerato adiabatico, la potenza termica acquistata dal fluido 1 (l'aria) dovrà essere pari a quella ceduta dal fluido 2 (la  $\text{CO}_2$ ):

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1} (T_{1,u} - T_{1,i}) \equiv \dot{m}_2 c_{p2} (T_{2,i} - T_{2,u})$$

Dalla relazione precedente si ricava che, all'uscita del tubo esterno, il fluido 2 presenta temperatura:

$$T_{2,u} = T_{2,i} - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_2 c_{p2}} = 259^{\circ}\text{C}$$

La temperatura media dell'anidride carbonica sarà perciò pari a:

$$T_{2,m} = \frac{T_{2,i} + T_{2,u}}{2} = 277^{\circ}\text{C} \equiv 550\text{ K}$$

Il risultato corrisponde con quello ipotizzato in prima approssimazione, ed i valori riportati nella tabella precedente sono quindi corretti. Si tratta però di un caso fortuito. In generale, si dovranno ricavare i valori effettivi delle proprietà del fluido per interpolazione lineare dei dati

disponibili, che andranno poi utilizzati per ricalcolare un valore più accurato della temperatura di uscita e della temperatura media.

Per procedere al dimensionamento dello scambiatore di calore, è a questo punto necessario valutare la differenza di temperatura media logaritmica. Trattandosi di uno scambiatore di calore in controcorrente, si ha:

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_{2,i} - T_{1,u}) - (T_{2,u} - T_{1,i})}{\ln\left[\frac{(T_{2,i} - T_{1,u})}{(T_{2,u} - T_{1,i})}\right]} = 230^{\circ}\text{C}$$

Si noti che, se lo scambiatore di calore fosse stato in equicorrente, si sarebbe dovuta impiegare una relazione differente per il calcolo della differenza di temperatura logaritmica media, sotto riportata:

$$\Delta T_{ml, \text{equicorrente}} = \frac{(T_{2,i} - T_{1,i}) - (T_{2,u} - T_{1,u})}{\ln\left[\frac{(T_{2,i} - T_{1,i})}{(T_{2,u} - T_{1,u})}\right]}$$

Calcolata  $\Delta T_{ml}$ , è poi possibile determinare il principale parametro di progetto dello scambiatore, UA. Sapendo che

$$\dot{Q} = UA\Delta T_{ml}$$

se ne ricava

$$UA = \frac{\dot{Q}}{\Delta T_{ml}} = 6.56 \text{ W}/^{\circ}\text{C}$$

Nel caso in esame, è necessario determinarne la lunghezza dello scambiatore. A tal scopo, occorre calcolare i diametri di riferimento delle sezioni di passaggio. Per il tubo attraversato dal primo fluido, che presenta sezione circolare, è ovvio impiegare il diametro esterno della sezione di passaggio:

$$D_1 = D_A = 0.075 \text{ m}$$

La sezione di passaggio del fluido 1 presenta area:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 0.004418 \text{ m}^2$$

La velocità del fluido 1 nel condotto vale:

$$w_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1 S_1} = 5.66 \text{ m/s}$$

Inoltre, il numero di Reynolds vale:

$$\text{Re}_{D_1} = \frac{w_1 D_1}{\nu_1} = 2.19 \cdot 10^4$$

La sezione di passaggio del secondo fluido presenta geometria anulare. In tal caso, si fa riferimento al cosiddetto “diametro idraulico”,  $D_h$ , definito come

$$D_{2,h} = \frac{4 \cdot S_2}{P_2}$$

in cui  $S_2$  è l'area della sezione di passaggio del fluido, pari a

$$S_2 = \frac{\pi \cdot (D_C^2 - D_B^2)}{4} = 0.002827 \text{ m}^2$$

e  $P_2$  è il perimetro della sezione bagnata dal fluido, in questo caso pari alla somma dei perimetri interno ed esterno del condotto anulare

$$P_2 = \pi \cdot D_B + \pi \cdot D_C$$

Per un condotto a sezione anulare si ottiene pertanto che:

$$D_2 \equiv D_{2,h} = \frac{4 \cdot (\pi/4) \cdot (D_C^2 - D_B^2)}{\pi \cdot (D_B + D_C)} = \frac{(D_C^2 - D_B^2)}{(D_B + D_C)} \equiv D_B - D_C = 0.020 \text{ m}$$

La velocità del fluido 2 nel condotto vale:

$$w_2 = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2 S_2} = 14.49 \text{ m/s}$$

Inoltre, il numero di Reynolds vale:

$$Re_{D_2} = \frac{w_2 D_2}{\nu_2} = 1.14 \cdot 10^4$$

Per il calcolo del numero di Nusselt sono disponibili svariate relazioni empiriche. Una di queste è la relazione di Dittus-Boelter, che presenta forma generale:

$$Nu_D = 0.023 \cdot Re_D^{0.8} \cdot Pr^n$$

in cui  $n = 0.4$  se il fluido in esame subisce un riscaldamento, mentre  $n = 0.3$  se invece il fluido subisce un raffreddamento. La relazione è applicabile se:

$$0.7 < Pr < 160 \quad Re_D > 10^4 \quad L/D > 10$$

Si verifica immediatamente che le prime due condizioni di applicabilità sono rispettate per entrambi i condotti. La verifica della terza condizione, implicante la trascurabilità degli effetti di sviluppo del moto all'ingresso dei condotti, richiede la conoscenza della lunghezza dei condotti stessi e va quindi verificata a posteriori.

Per il fluido 1, che si riscalda, si avrà così che il numero di Nusselt vale

$$Nu_{D_1} = 0.023 \cdot Re_{D_1}^{0.8} \cdot Pr_1^{0.4} = 59.5$$

da cui, impiegando la definizione del numero di Nusselt, si ricava il coefficiente di convezione superficiale

$$h_1 = \frac{Nu_{D_1} \cdot \lambda_1}{D_1} = 21.8 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

Per il fluido 2, che si raffredda, si avrà che:

$$Nu_{D_2} = 0.023 \cdot Re_{D_2}^{0.8} \cdot Pr_2^{0.3} = 36.9$$

e, quindi:

$$h_2 = \frac{Nu_{D_2} \lambda_2}{D_2} = 67.0 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

Poiché l'inverso del prodotto UA altro non è che la resistenza termica globale dell'interfaccia tra i due fluidi, si può a questo punto scrivere:

$$\frac{1}{UA} \equiv \frac{\Delta T_{ml}}{\dot{Q}} = R_1 + R_p + R_2 = \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(D_B/D_A)}{2\pi \cdot \lambda_p L} + \frac{1}{h_2 A_2}$$

Si noti che la superficie esterna del condotto anulare è adiabatica e, quindi, inattiva ai fini dello scambio termico. La resistenza posta dalla parete metallica è in generale trascurabile rispetto alle resistenze convettive e può essere perciò eliminata dalla relazione precedente:

$$\frac{\Delta T_{ml}}{\dot{Q}} = \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{1}{h_2 A_2} \equiv \frac{1}{h_1 \cdot \pi \cdot D_A L} + \frac{1}{h_2 \cdot \pi \cdot D_B L}$$

La relazione precedente presenta come unico parametro incognito L, e può essere risolta rispetto ad esso:

$$L = \frac{\dot{Q}}{\Delta T_{ml}} \left( \frac{1}{h_1 \cdot \pi \cdot D_A} + \frac{1}{h_2 \cdot \pi \cdot D_B} \right) = 1.67 \text{ m}$$

In alternativa al procedimento sopra illustrato, è possibile valutare il coefficiente globale di scambio termico tra i due fluidi, U. Essendo la geometria cilindrica, tale coefficiente deve essere riferito ad una ben precisa superficie di scambio, ad esempio a quella lambita dal fluido che scorre nel condotto anulare, A<sub>2</sub> (quindi, U = U<sub>2</sub>). Moltiplicando per tale superficie la relazione precedente e risolvendola rispetto ad U<sub>2</sub>, si ha che:

$$U_2 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} \frac{A_2}{A_1} + \frac{1}{h_2}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} \frac{\pi \cdot D_B \cdot L}{\pi \cdot D_A \cdot L} + \frac{1}{h_2}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} \frac{D_B}{D_A} + \frac{1}{h_2}} = 15.7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

In conclusione, l'area di scambio A<sub>2</sub> deve essere tale che:

$$\dot{Q} = U_2 A_2 \Delta T_{ml} = U_2 (\pi \cdot D_2 L) \Delta T_{ml}$$

da cui si ricava infine

$$L = \frac{\dot{Q}}{U_2 \cdot \pi \cdot D_2 \Delta T_{ml}} = 1.67 \text{ m}$$

Il risultato è perfettamente equivalente a quello calcolato in precedenza.

Occorre infine verificare la validità la terza condizione di validità della relazione impiegata per il calcolo del numero di Nusselt. Per il condotto a sezione circolare si ha

$$\frac{L}{D_1} = \frac{1.67}{0.075} = 22 > 10$$

mentre, per il condotto a sezione anulare, si ottiene

$$\frac{L}{D_2} = \frac{1.67}{0.020} = 83 > 10$$

### Commenti

Il metodo viene tipicamente impiegato per determinare le caratteristiche di uno scambiatore di calore tra due fluidi, note le temperature di ingresso di entrambi i fluidi e quella desiderata in uscita per uno di essi. In particolare, il metodo consente di stimare lo sviluppo longitudinale dei condotti dello scambiatore o, più spesso, il valore del prodotto UA (un parametro che è generalmente dichiarato dai produttori di scambiatori di calore e che, quindi, può essere impiegato per la scelta da catalogo di un dispositivo).

**J.II. Scambiatore di calore olio-aria a flussi incrociati non mescolati ( $\Delta T_{ml}$ )**

Problema

Si consideri uno scambiatore di calore a correnti incrociate a fluidi non mescolati, utilizzato per raffreddare mediante aria una portata di olio caldo proveniente da un motore. I dati di funzionamento dello scambiatore sono riportati nel seguito. Si determini il valore del prodotto UA.

Dati

Tipo di scambiatore:	a flussi incrociati non mescolati
$\dot{m}_1 = 0.3 \text{ kg/s}$	(portata in massa del fluido 1, olio)
$c_{p1} = 2131.0 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$	(calore specifico del fluido 1)
$T_{1,i} = 88^\circ\text{C}$	(temperatura in ingresso del fluido 1)
$\dot{m}_2 = 0.5 \text{ kg/s}$	(portata in massa del fluido 2, aria)
$c_{p2} = 1008.5 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$	(calore specifico del fluido 2)
$T_{2,i} = 52^\circ\text{C}$	(temperatura in ingresso del fluido 2)
$T_{2,u} = 74^\circ\text{C}$	(temperatura in uscita del fluido 2)

Determinare

UA

Ipotesi

Regime stazionario, effetti radiativi trascurabili, superfici di scambio pulite, proprietà dei fluidi indipendenti dalla temperatura, sporco ed incrostazioni trascurabili

Soluzione

La potenza termica scambiata sarà tale che:

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot (T_{2,u} - T_{2,i}) = 11094 \text{ W}$$

Si ha peraltro che la potenza termica acquistata dal fluido 2 (l'aria) dovrà essere pari a quella sottratta al fluido 1 (l'olio):

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot (T_{1,i} - T_{1,u}) \equiv \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot (T_{2,u} - T_{2,i})$$

Dalla relazione precedente si ricava che, all'uscita del tubo esterno, il fluido 2 presenta temperatura:

$$T_{1,u} = T_{1,i} - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} = 70.6^\circ\text{C}$$

È a questo punto possibile valutare la differenza di temperatura media logaritmica. Per gli scambiatori a flussi incrociati (così come per quelli a passaggi multipli dei tubi nel mantello), si fa riferimento alla relazione impiegata per il calcolo degli scambiatori in controcorrente:

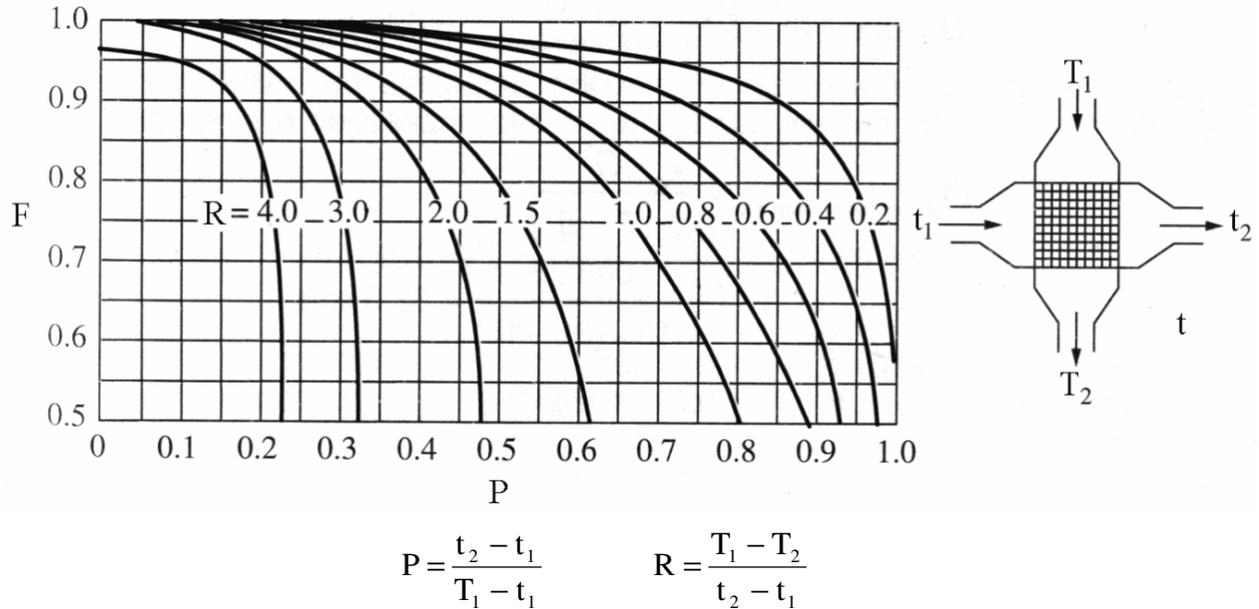
$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_{2,i} - T_{1,u}) - (T_{2,u} - T_{1,i})}{\ln\left[\frac{(T_{2,i} - T_{1,u})}{(T_{2,u} - T_{1,i})}\right]} = 16.2^\circ\text{C}$$

Poiché non si è nel caso fondamentale di condotti in controcorrente, per procedere al dimensionamento dello scambiatore di calore occorre valutare un opportuno coefficiente di

correzione F, legato alla geometria effettiva dello scambiatore, che può essere poi introdotto nella relazione seguente:

$$\dot{Q} = F \cdot U \cdot A \cdot \Delta T_{ml}$$

Nei manuali si possono reperire diagrammi per il calcolo di F che, per scambiatori di calore a tubi coassiali a flussi incrociati entrambi non mescolati, sono simili a quello sotto riportato:



Si noti che, nei diagrammi di tale tipo,  $T_1$  e  $T_2$  sono sempre le temperature in ingresso e in uscita del fluido nel mantello, mentre  $t_1$  e  $t_2$  sono le temperature in ingresso e in uscita dell'altro fluido. In realtà, solo nel caso in esame di uno scambiatore a flussi incrociati entrambi non mescolati, la distinzione non ha significato e la scelta è indifferente. Pertanto, i parametri P e R si possono stimare come segue:

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} = \frac{T_{1,u} - T_{1,i}}{T_{2,i} - T_{1,i}} = 0.48 \qquad R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{T_{2,i} - T_{2,u}}{T_{1,u} - T_{1,i}} = 1.27$$

Tramite il diagramma sopra riportato si può quindi stimare (con qualche approssimazione) il coefficiente correttivo:

$$F \approx 0.87$$

In conclusione, si ha che:

$$U \cdot A = \frac{\dot{Q}}{F \cdot \Delta T_{ml}} = 786 \text{ W/}^\circ\text{C}$$

Commenti

Nel calcolo di F, occorre prestare particolare attenzione alla scelta del diagramma da impiegare, che dipende dal tipo di scambiatore in esame.

La determinazione dell'area di scambio A di uno scambiatore di calore a correnti incrociate è in generale assai complessa, a causa della compattezza e delle tecniche costruttive impiegate. Per questo e per altri motivi, il parametro UA viene tipicamente stimato per via sperimentale ed è dichiarato nel suo complesso da chi produce lo scambiatore di calore.

Si noti che, se si fosse invertito il criterio di scelta delle temperature per la stima dei parametri P e R, si sarebbe ottenuto

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} = \frac{T_{2,u} - T_{2,i}}{T_{1,i} - T_{2,i}} = 0.61 \qquad R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{T_{1,i} - T_{1,u}}{T_{2,u} - T_{2,i}} = 0.79$$

e, quindi,

$$F \approx 0.87$$

Si rammenta che il risultato vale solo nel caso di uno scambiatore a flussi incrociati entrambi non mescolati. In tutte le altre configurazioni, il criterio di calcolo di P e R è unico ed è tipicamente desumibile dagli schemi che, nei manuali, sono riportati accanto ai diagrammi per la stima di F.

### **J.III. Scambiatore acqua-olio a tubi coassiali in controcorrente ( $\epsilon$ -NTU)**

#### Problema

Una portata 42 L/min di acqua entra a temperatura 40°C in uno scambiatore di calore a tubi coassiali, funzionante in controcorrente. Nello scambiatore, l'acqua viene riscaldata da una portata di 93 L/min di olio, che entra nello scambiatore a 115°C. La densità e il calore specifico dell'acqua sono rispettivamente pari a 1000 kg/m<sup>3</sup> e 4.187 kJ/(kg·°C), mentre la densità e il calore specifico dell'olio sono pari a 903 kg/m<sup>3</sup> e 1.883 kJ/(kg·°C).

Se l'area della superficie di scambio è pari a 13 m<sup>2</sup> ed il coefficiente globale di scambio termico vale 340 W/(m<sup>2</sup>·°C), determinare il calore totale scambiato nell'unità di tempo e le temperature di uscita di acqua e olio.

#### Dati

Tipo di scambiatore:	a tubi coassiali in controcorrente
$\dot{V}_1 = 42 \text{ L/min} = 0.00070 \text{ m}^3/\text{s}$	(portata in volume del fluido 1, acqua)
$\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$	(densità massica del fluido 1)
$c_{p1} = 4.187 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{°C)} = 4187 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$	(calore specifico del fluido 1)
$T_{1,i} = 40^\circ\text{C}$	(temperatura in ingresso del fluido 1)
$\dot{V}_2 = 93 \text{ L/min} = 0.00155 \text{ m}^3/\text{s}$	(portata in volume del fluido 2, olio)
$\rho_2 = 903 \text{ kg/m}^3$	(densità massica del fluido 2)
$c_{p2} = 1.883 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{°C)} = 1883 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$	(calore specifico del fluido 2)
$T_{2,i} = 115^\circ\text{C}$	(temperatura in ingresso del fluido 2)
$A = 13 \text{ m}^2$	(area della superficie di scambio termico)
$U = 340 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$	(coefficiente globale di scambio termico)

#### Determinare

$\dot{Q}$	(potenza termica scambiata tra i due fluidi)
$T_{1,u}$	(temperatura in uscita dell'acqua)
$T_{2,u}$	(temperatura in uscita dell'olio)

Ipotesi

Regime stazionario, proprietà costanti, mantello adiabatico, resistenza termica del tubo interno trascurabile, proprietà dei fluidi costanti con la temperatura, sporcamento ed incrostazioni trascurabili

Soluzione

Non conoscendo le temperature in uscita di nessuno dei due fluidi, occorre impiegare il metodo dell'efficienza ( $\epsilon$ -NTU). A tal scopo, è necessario valutare le portate in massa e, quindi, le portate termiche.

Per il fluido 1 (acqua) si ha:

$$\dot{m}_1 = \rho_1 \dot{V}_1 = 0.70 \text{ kg/s}$$

$$C_1 = \dot{m}_1 c_{p1} = 2931 \text{ W/}^\circ\text{C}$$

Per il fluido 2 (olio) si ha:

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \dot{V}_2 = 1.40 \text{ kg/s}$$

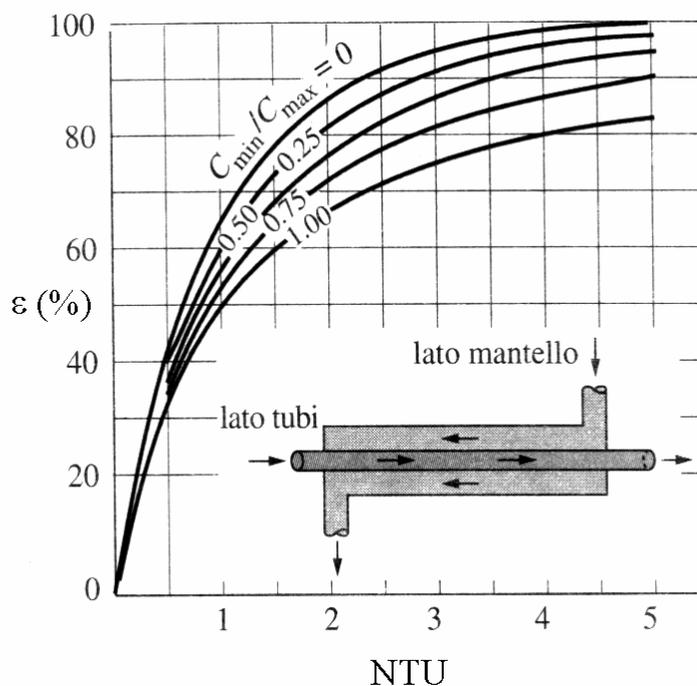
$$C_2 = \dot{m}_2 c_{p2} = 2636 \text{ W/}^\circ\text{C}$$

Dalle portate termiche si ricava:

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \equiv \frac{C_2}{C_1} = 0.899 \approx 0.9$$

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} \equiv \frac{UA}{C_2} = 1.68$$

Nei manuali si possono reperire diagrammi per il calcolo dell'efficienza che, per scambiatori di calore a tubi coassiali in controcorrente, sono simili a quello sotto riportato:



Dal diagramma si ricava (con qualche sforzo di interpolazione):

$$\epsilon = \epsilon(C_{\min}/C_{\max}, NTU) \approx 65\%$$

La potenza termica massima scambiabile tra i due fluidi vale:

$$\dot{Q}_{\max} = C_{\min} (T_{2,i} - T_{1,i}) = 198 \cdot 10^3 \text{ W} = 198 \text{ kW}$$

La potenza termica effettivamente scambiata tra i due fluidi vale invece:

$$\dot{Q} = \varepsilon \dot{Q}_{\max} = \varepsilon C_{\min} (T_{2,i} - T_{1,i}) = 128 \cdot 10^3 \text{ W} = 128 \text{ kW}$$

Infine, le temperature di uscita sono, per l'acqua,

$$T_{1,u} = T_{1,i} + \frac{\dot{Q}}{C_1} = 83.8^\circ\text{C}$$

e per l'olio,

$$T_{2,u} = T_{2,i} - \frac{\dot{Q}}{C_2} = 66.3^\circ\text{C}$$

### Commenti

Nel calcolo di  $\varepsilon$ , occorre prestare particolare attenzione alla scelta del diagramma da impiegare, che dipende dal tipo di scambiatore in esame.

Oltre ai diagrammi, per il calcolo dell'efficienza, sono reperibili nei manuali anche apposite relazioni analitiche. Ad esempio, per il caso in esame di uno scambiatore tubo in tubo in controcorrente, si ha:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU \cdot (1 - C_{\min}/C_{\max})]}{1 - (C_{\min}/C_{\max}) \cdot \exp[-NTU(1 - C_{\min}/C_{\max})]} = 0.646 = 64.6\%$$

In risultato è in ottimo accordo con quello ottenuto da diagramma.

## **J.IV. Scambiatore esterno di un dissipatore a liquido per microprocessore ( $\varepsilon$ -NTU)**

### Problema

Uno scambiatore di calore acqua-aria deve essere integrato nel sistema di raffreddamento a liquido di un microprocessore. Il microprocessore dissipa, in condizioni di massimo carico, 120 W termici. Il raffreddamento è assicurato da una portata di 19 L/ora d'acqua, che cede all'ambiente esterno il calore sottratto al microprocessore tramite lo scambiatore in oggetto. Lo scambiatore di calore che si intende usare è del tipo a fascio tubiero privo di alettature, investito da portata trasversale di 90 m<sup>3</sup>/ora d'aria assicurata da un apposito dispositivo di ventilazione (si tratta, evidentemente, di uno scambiatore a flussi incrociati di cui quello interno, l'acqua, è non miscelato, ovvero non misto). Il coefficiente globale di scambio termico UA del modello di scambiatore considerato è pari a 55 W/°C.

Determinare l'efficienza dello scambiatore. Inoltre, sapendo che la massima temperatura dell'aria ambiente è pari a 35°C, determinare le temperature in ingresso e in uscita dell'acqua. Si assumano per questa densità 1000 kg/m<sup>3</sup> e calore specifico 4.19 kJ/(kg·°C), e per l'aria densità 1.16 kg/m<sup>3</sup> e calore specifico 1.01 kJ/(kg·°C).

### Dati

Tipo di scambiatore: a flussi incrociati di cui uno solo (l'acqua) non miscelato

$\dot{Q}_{mp} = 120 \text{ W}$	(potenza termica dissipata nel microprocessore)
$\dot{V}_1 = 19 \text{ L/hr} = 5.30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$	(portata in volume del fluido 1, acqua)
$\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$	(densità massica del fluido 1)
$c_{p1} = 4.19 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}) = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$	(calore specifico del fluido 1)
$\dot{V}_2 = 90 \text{ m}^3/\text{hr} = 0.025 \text{ m}^3/\text{s}$	(portata in volume del fluido 2, aria)
$\rho_2 = 1.16 \text{ kg/m}^3$	(densità massica del fluido 2)
$c_{p2} = 1.01 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}) = 1010 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$	(calore specifico del fluido 2)
$T_a \equiv T_{2,i} = 35^\circ\text{C}$	(temperatura ambiente e di ingresso del fluido 2)
$UA = 55 \text{ W}/^\circ\text{C}$	(coefficiente globale di scambio termico)

Determinare

$\varepsilon$	(efficienza)
$T_{1,i}$	(temperatura in ingresso dell'acqua)
$T_{1,u}$	(temperatura in uscita dell'acqua)

Ipotesi

Regime stazionario, proprietà costanti, resistenza termica delle pareti dei tubi trascurabile, proprietà dei fluidi costanti con la temperatura, sporcamento ed incrostazioni trascurabili

Soluzione

Non conoscendo le temperature in uscita di nessuno dei due fluidi, occorre impiegare il metodo dell'efficienza ( $\varepsilon$ -NTU). A tal scopo, è necessario valutare le portate in massa e, quindi, le portate termiche.

Per il fluido 1 (acqua) si ha:

$$\dot{m}_1 = \rho_1 \dot{V}_1 = 0.00528 \text{ kg/s}$$

$$C_1 = \dot{m}_1 c_{p1} = 22.1 \text{ W}/^\circ\text{C}$$

Per il fluido 2 (aria) si ha:

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \dot{V}_2 = 0.0290 \text{ kg/s}$$

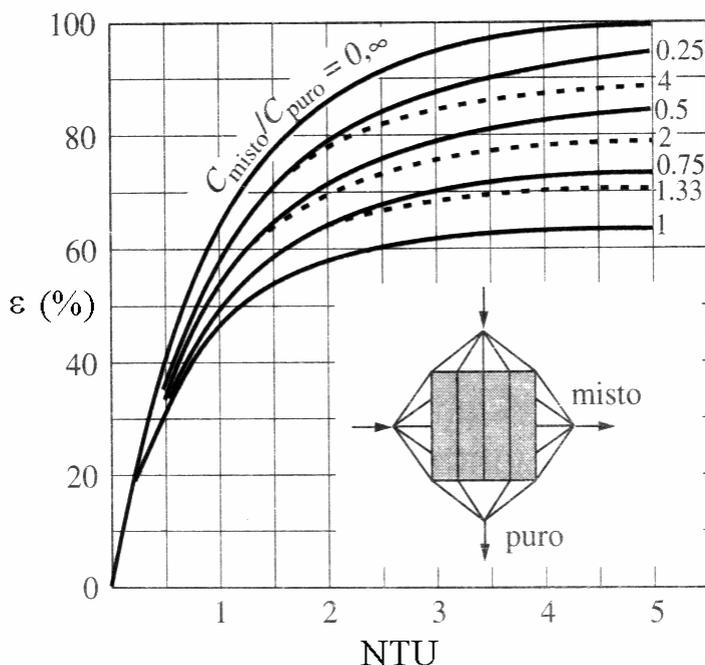
$$C_2 = \dot{m}_2 c_{p2} = 29.3 \text{ W}/^\circ\text{C}$$

Dalle portate termiche si ricava:

$$\frac{C_{\text{misto}}}{C_{\text{puro}}} \equiv \frac{C_2}{C_1} = 1.325 \cong 1.33$$

$$\text{NTU} = \frac{UA}{C_{\text{min}}} \equiv \frac{UA}{C_1} = 2.49 \cong 2.5$$

Nei manuali si possono reperire diagrammi per il calcolo dell'efficienza che, per scambiatori di calore a flussi incrociati di cui uno solo (l'acqua) non miscelato (o misto, o mescolato), sono simili a quello riportato di seguito.



Dal diagramma si ricava:

$$\epsilon = \epsilon(C_{\text{misto}}/C_{\text{puro}}, NTU) \approx 67\%$$

Note l'efficienza dello scambiatore e la potenza termica che deve essere dissipata, è possibile determinare la potenza termica massima scambiabile tra i due fluidi:

$$\dot{Q}_{\text{max}} = \frac{\dot{Q}_{\text{mp}}}{\epsilon} = 179 \text{ W}$$

D'altra parte, la potenza termica massima scambiabile può essere valutata come segue:

$$\dot{Q}_{\text{max}} = C_{\text{min}} (T_{2,i} - T_{1,i})$$

Da ciò si ricava che la temperatura dell'acqua in ingresso allo scambiatore vale:

$$T_{1,i} = T_{2,i} + \frac{\dot{Q}_{\text{max}}}{C_{\text{min}}} \equiv T_{2,i} + \frac{\dot{Q}_{\text{max}}}{C_1} = 43.1^\circ\text{C}$$

La temperatura in uscita dell'acqua (che si raffredda attraversando lo scambiatore) si ricava considerando che

$$\dot{Q}_{\text{mp}} = C_1 (T_{1,i} - T_{1,u})$$

da cui

$$T_{1,u} = T_{1,i} - \frac{\dot{Q}_{\text{mp}}}{C_1} = 37.7^\circ\text{C}$$

Commenti

Si noti che, nel diagramma, NTU è sempre pari al rapporto tra UA e C<sub>min</sub>, mentre le varie curve sono riferite a diversi valori del rapporto tra C<sub>misto</sub> e C<sub>puro</sub>. Tale rapporto, a differenza di quello tra C<sub>min</sub> e C<sub>max</sub>, può essere anche maggiore dell'unità.

In un sistema di raffreddamento a liquido, il calore viene sottratto al microprocessore mediante un dissipatore, tipicamente costituito da una piastra in alluminio o rame, al cui interno è ricavata una serpentina. Una delle superfici principali della piastra deve essere posta

in contatto diretto con il microprocessore, adottando accorgimenti tali da minimizzare la resistenza termica di contatto.

Se si trascurano, in favore di sicurezza, gli scambi termici attraverso le pareti della pompa (necessariamente presente per far circolare il liquido) e dei condotti di collegamento tra scambiatore di calore esterno e dissipatore in contatto col microprocessore, la temperatura alla quale l'acqua esce dallo scambiatore è uguale alla temperatura a cui l'acqua stessa entra nel dissipatore. Ma, soprattutto, poiché nel dissipatore l'acqua acquisisce dal microprocessore una potenza termica uguale, in valore assoluto, a quella ceduta all'aria esterna tramite lo scambiatore, la temperatura a cui l'acqua stessa entra nello scambiatore è uguale alla temperatura a cui essa esce dal dissipatore, ovvero alla massima temperatura che raggiunge all'interno del dissipatore. Pertanto, questo ultimo valore di temperatura ( $T_{1,i}$ ) è quello da prendersi a riferimento per stimare, mediante analogia elettrotermica, la massima temperatura raggiungibile dal processore.

$$T_{mp,max} = T_{2,i} + R_{mp/l} \dot{Q}_{mp}$$

Ovviamente, è necessario conoscere la resistenza termica  $R_{mp/l}$  tra microprocessore e liquido, inclusiva delle resistenze per contatto tra microprocessore e dissipatore, per conduzione nel metallo del dissipatore e per convezione tra le pareti dei condotti ricavati nel dissipatore e l'acqua che vi scorre all'interno.

Le dissipazioni viscosse nei condotti e all'interno della pompa danno luogo ad un lieve riscaldamento dell'acqua, che è generalmente trascurabile per portate ridotte come quella considerata.

Nel caso l'aria che ha attraversato lo scambiatore (e che si è riscaldata attraversandolo) vada a lambire qualcosa sensibile al calore (persone, dispositivi elettrici ed elettronici, piante ornamentali, ecc.), è opportuno valutarne la temperatura in uscita. Nel caso in esame, tale temperatura vale:

$$T_{2,u} = T_{2,i} + \frac{\dot{Q}_{mp}}{C_2} = 39.1^\circ\text{C}$$

L'incremento rispetto al valore ambiente considerato ( $35^\circ\text{C}$ ) è modesto, di poco superiore a  $4^\circ\text{C}$ , ma può risultare comunque fastidioso.

**ESERCIZI UNITA' Z – SOMMARIO**

**Z. CONTROLLO TERMICO IN ELETTRONICA**

**Z.I. Scelta di un dissipatore**

**Z.II. Scelta di un dispositivo di ventilazione**

**Z.III. Scelta di una soluzione di accoppiamento processore/dissipatore**

**Z.IV. Verifica termica dei componenti di un sistema elettronico**

**Z.V. Influenza degli scambi termici attraverso le pareti di un cabinet**

**Z.VI. Sistema elettronico con dispositivo di raffreddamento a liquido**

**Z.VII. Influenza degli scambi termici attraverso le pareti di un cabinet (2)**

**Z.VIII. Valutazione della portata di aerazione**

**Z.IX. Verifica termica dei componenti di un sistema elettronico (2)**

**Z.X. Verifica termica dei componenti di un sistema elettronico (3)**

**Z.I. Scelta di un dissipatore**

– Problema

I dispositivi di aerazione interna di un cabinet per apparecchiature elettroniche assicurano una portata di  $1.2 \text{ m}^3/\text{min}$ . Nel cabinet sono alloggiati un microprocessore che assorbe fino a  $21 \text{ W}$  elettrici e dispositivi di vario tipo che assorbono complessivamente altri  $140 \text{ W}$ .

Individuare il più conveniente tra i due dissipatori di calore a superficie alettata disponibili, le cui caratteristiche sono illustrate nel seguito, sapendo che il microprocessore, che è il componente più critico, presenta temperatura massima ammissibile pari a  $90^\circ\text{C}$  e superficie di scambio termico  $1 \text{ cm}^2$ , e che la resistenza di contatto tra dissipatore e microprocessore, riferita all'unità di superficie, è pari a  $1 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$ . Stimare nei due casi la massima temperatura raggiunta dal microprocessore.

- Superficie alettata non ventilata,  $R = 1.5^\circ\text{C}/\text{W}$
- Superficie alettata con ventola,  $R = 0.5^\circ\text{C}/\text{W}$

Si assumano per l'aria densità pari a  $1.15 \text{ kg}/\text{m}^3$ , calore specifico a pressione costante pari a  $1007 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$  e temperatura nell'ambiente esterno compresa tra  $15^\circ\text{C}$  e  $30^\circ\text{C}$ .

– Dati

$$\dot{V} = 1.2 \text{ m}^3/\text{min} = 0.020 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{Q}_{\text{mp}} = 21 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{\text{alia}} = 140 \text{ W}$$

$$T_{\text{mp,max}} = 90^\circ\text{C}$$

$$A_{\text{mp}} = 1 \text{ cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_c'' = 1 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W} = 0.0001 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_{\text{d,s/v}} = 1.5^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_{\text{d,c/v}} = 0.5^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$\rho = 1.15 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1007 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$T_{\text{amb,min}} = 15^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{amb,max}} = 30^\circ\text{C}$$

– Determinare

Massima temperatura raggiunta dal microprocessore nelle due configurazioni indicate

– Ipotesi

Aria gas ideale.

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dal microprocessore, in funzione del tipo di dissipatore impiegato.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si possono trascurare (in favore di sicurezza) gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile (oppure accumulabile nelle dissipazioni elettriche di vario tipo che avvengono all'interno del cabinet) è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e da questi trasferita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} = 161 \text{ W}$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.023 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione di entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p(T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è compresa tra 15°C e 30°C. Le condizioni più gravose si avranno, ovviamente, quando la temperatura ambiente è massima, da cui:

$$T_1 = 30^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 37.0^\circ\text{C}$$

Dati la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ) ed il dissipatore di calore (con la sua resistenza termica  $R_d$ ), la temperatura del microprocessore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d) \dot{Q}_{mp}$$

La resistenza di contatto  $R_c$  è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_c = \frac{R_c''}{A} = 1 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

In definitiva, la temperatura massima raggiungibile dal processore accoppiato al dissipatore senza ventola sarà pari a:

$$T_{mp,s/v} = T_2 + (R_c + R_{d,s/v}) \dot{Q}_{mp} = 89.5^\circ\text{C}$$

Invece, impiegando il dissipatore con ventola, la temperatura massima raggiungibile dal processore sarà pari a:

$$T_{mp,c/v} = T_2 + (R_c + R_{d,c/v}) \dot{Q}_{mp} = 68.5^\circ\text{C}$$

Entrambe le soluzioni sono in teoria soddisfacenti, ma la prima porta il microprocessore a lavorare in condizioni molto prossime al limite operativo ed è quindi, nella pratica, da considerare con qualche riserva.

## Z.II. Scelta di un dispositivo di ventilazione

### – Problema

In un cabinet per personal computer sono alloggiati un processore che dissipa fino a 50 W ed apparecchiature elettriche ed elettroniche di vario tipo che dissipano complessivamente altri 150 W.

Individuare il più conveniente tra i due possibili dispositivi di aerazione interna del cabinet, che assicurano le portate d'aria indicate nel seguito, sapendo che il processore presenta temperatura massima ammissibile pari a 80°C e superficie di scambio termico 2.2 cm<sup>2</sup>, che il dissipatore di calore a superficie alettata impiegato per il suo raffreddamento presenta resistenza termica 0.3°C/W e che la resistenza di contatto tra dissipatore e processore, riferita all'unità di superficie, vale 0.7 cm<sup>2</sup>·°C/W. Stimare nei due casi la massima temperatura raggiunta dal processore.

- sistema a ventola doppia, portata d'aria 45 m<sup>3</sup>/h
- sistema a ventola tripla, portata d'aria 95 m<sup>3</sup>/h

Si assumano per l'aria densità pari a 1.15 kg/m<sup>3</sup>, calore specifico a pressione costante pari a 1007 J/(kg·°C) e temperatura nell'ambiente esterno compresa tra 25°C e 35°C.

### – Dati

$$\dot{Q}_{mp} = 50 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{alia} = 150 \text{ W}$$

$$T_{mp,max} = 80^\circ\text{C}$$

$$A_{mp} = 2.2 \text{ cm}^2 = 2.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_c'' = 0.00007 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_d = 0.3^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$\dot{V}_{v2} = 45 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0125 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{V}_{v3} = 95 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0264 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rho = 1.15 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1007 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$T_{amb,min} = 25^\circ\text{C}$$

$$T_{amb,max} = 35^\circ\text{C}$$

### – Determinare

Massima temperatura raggiunta dal microprocessore nelle due configurazioni indicate

### – Ipotesi

Aria gas ideale.

– *Soluzione*

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dal microprocessore, in funzione del tipo di dispositivo di aerazione interna impiegato.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si possono trascurare (in favore di sicurezza) gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile (oppure accumulabile nelle dissipazioni elettriche di vario tipo all'interno del cabinet) è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} = 200 \text{ W}$$

La portata in massa nei due casi contemplati vale:

$$\dot{m}_{v2} = \rho \dot{V}_{v2} = 0.0144 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_{v3} = \rho \dot{V}_{v3} = 0.0303 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione di entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p (T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è compresa tra 25°C e 35°C. Le condizioni più gravose si avranno, ovviamente, quando la temperatura ambiente è massima, da cui:

$$T_1 = 35^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale, nelle due configurazioni di sistema:

$$T_{2,v2} = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{v2} c_p} = 48.8^\circ\text{C}$$

$$T_{2,v3} = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{v3} c_p} = 41.5^\circ\text{C}$$

Dati la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ) ed il dissipatore di calore (con la sua resistenza termica  $R_d$ ), la temperatura del microprocessore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp}$$

La resistenza di contatto  $R_c$  è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_c = \frac{R_c''}{A} = 0.32 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In definitiva, se si utilizza il sistema a due ventole, la temperatura massima raggiungibile dal processore si può stimare pari a:

$$T_{mp,v2} = T_{2,v2} + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 79.7^\circ\text{C}$$

Invece, impiegando il dissipatore con ventola tripla, la temperatura massima raggiungibile dal processore sarà pari a:

$$T_{mp,v3} = T_{2,v3} + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 72.5^\circ\text{C}$$

Entrambe le soluzioni sono in teoria soddisfacenti, ma la prima porta il microprocessore a lavorare in condizioni molto prossime al limite operativo ed è quindi, nella pratica, da considerare con qualche riserva.

### Z.III. Scelta di una soluzione di accoppiamento processore/dissipatore

#### – Problema

Il sistema di ventilazione interna di un personal computer assicura una portata di  $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ . Nel computer sono presenti un processore che dissipa fino a  $30 \text{ W}$  e dispositivi elettrici ed elettronici di vario tipo che dissipano complessivamente altri  $80 \text{ W}$ . La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è compresa tra  $10^\circ\text{C}$  e  $35^\circ\text{C}$ .

Individuare la più conveniente tra le due soluzioni possibili di accoppiamento termico tra processore e relativo dissipatore, le cui resistenze di contatto riferite all'unità di superficie sono riportate nel seguito, sapendo che il processore presenta temperatura massima ammissibile  $70^\circ\text{C}$  e superficie di scambio termico  $140 \text{ mm}^2$ , e che il dissipatore a superficie alettata impiegato per il suo raffreddamento presenta resistenza termica  $0.4^\circ\text{C/W}$ . Stimare nei due casi la massima temperatura raggiunta dal processore.

- Grasso siliconico e media pressione di contatto, resistenza di contatto  $0.9 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$
- Pasta a base argento ed elevata pressione di contatto, resistenza di contatto  $0.2 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$

Si assumano per l'aria una densità pari a  $1.16 \text{ kg/m}^3$  ed un calore specifico a pressione costante pari a  $1006 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ .

#### – Dati

$$\dot{V} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{Q}_{mp} = 30 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{alia} = 80 \text{ W}$$

$$T_{amb,min} = 10^\circ\text{C}$$

$$T_{amb,max} = 35^\circ\text{C}$$

$$T_{mp,max} = 70^\circ\text{C}$$

$$A_{mp} = 140 \text{ mm}^2 = 1.40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_d = 0.4^\circ\text{C/W}$$

$$R_{c,1}'' = 0.9 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C/W} = 0.00009 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{c,2}'' = 0.2 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C/W} = 0.00002 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$$

$$\rho = 1.16 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 1006 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$$

– Determinare

Massima temperatura raggiunta dal microprocessore nelle due configurazioni indicate

– Ipotesi

Aria gas ideale.

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dal microprocessore, in funzione del tipo di soluzione accoppiamento termico impiegata.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si possono trascurare (in favore di sicurezza) gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile (oppure accumulabile nelle dissipazioni elettriche di vario tipo all'interno del cabinet) è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} = 110 \text{ W}$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0116 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione di entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p (T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è compresa tra 10°C e 35°C. Le condizioni più gravose si avranno, ovviamente, quando la temperatura ambiente è massima, da cui:

$$T_1 = 35^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 44.4^\circ\text{C}$$

Dati la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ) ed il dissipatore di calore con la sua resistenza termica  $R_d$ , la temperatura del microprocessore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp}$$

Le resistenze di contatto per le due soluzioni di accoppiamento microprocessore-dissipatore in esame sono valutabili come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_{c,1} = \frac{R''_{c,1}}{A} = 0.643 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

$$R_{c,2} = \frac{R''_{c,2}}{A} = 0.143 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

In definitiva, con la prima soluzione di accoppiamento la temperatura massima del processore sarà pari a

$$T_{mp,1} = T_2 + (R_{c,1} + R_d)\dot{Q}_{mp} = 75.7^\circ\text{C}$$

mentre, con la seconda soluzione di accoppiamento, sarà pari a

$$T_{mp,2} = T_2 + (R_{c,2} + R_d)\dot{Q}_{mp} = 60.7^\circ\text{C}$$

Solo la seconda soluzione è soddisfacente, poiché permette al microprocessore di lavorare in ogni condizione a temperatura inferiore al limite operativo.

#### **Z.IV. Verifica termica dei componenti di un sistema elettronico**

##### **– Problema**

L'apparato di aerazione interna di un sistema elettronico assicura una portata pari a  $18 \text{ m}^3/\text{h}$ . La temperatura nell'ambiente esterno è compresa tra  $-10^\circ\text{C}$  e  $40^\circ\text{C}$ . Assumendo per l'aria  $\rho=1.16 \text{ kg/m}^3$  e  $c_p=1006 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$  costanti, verificare se i vari dispositivi presenti nel sistema, complessivamente elencati nel seguito, lavorano in sicurezza:

- a) microprocessore A con massima potenza elettrica dissipata  $20 \text{ W}$ , temperatura massima ammissibile  $85^\circ\text{C}$  e superficie di scambio  $0.8 \text{ cm}^2$ , raffreddato mediante un dissipatore di calore a superficie alettata con resistenza termica  $0.6^\circ\text{C/W}$  e resistenza di contatto  $0.7 \text{ cm}^2\cdot^\circ\text{C/W}$  tra dissipatore e microprocessore, riferita all'unità di superficie;
- b) microprocessore B con massima potenza elettrica dissipata  $0.5 \text{ W}$ , temperatura massima  $120^\circ\text{C}$  e superficie di scambio termico  $25.4 \text{ mm} \times 25.4 \text{ mm}$ , privo di dissipatore e raffreddato per convezione naturale con coefficiente di adduzione  $9 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}$ ;
- c) dispositivo C con massima potenza elettrica dissipata  $14 \text{ W}$ , temperatura massima ammissibile  $90^\circ\text{C}$ , raffreddato mediante un dissipatore di calore a superficie alettata privo di ventola, con resistenza termica  $3^\circ\text{C/W}$  inclusa la resistenza di contatto.

– Dati

$$\dot{V} = 18 \text{ m}^3/\text{h} = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$T_{\text{amb,min}} = -10^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{amb,max}} = 40^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1.16 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1006 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$\dot{Q}_{\text{mpA}} = 20 \text{ W}$$

$$T_{\text{max,mpA}} = 85^\circ\text{C}$$

$$A_{\text{mpA}} = 0.8 \text{ cm}^2 = 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R''_{\text{c,mpA}} = 0.7 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W} = 0.00007 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_{\text{d,mpA}} = 0.6^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$\dot{Q}_{\text{mpB}} = 0.5 \text{ W}$$

$$T_{\text{max,mpB}} = 120^\circ\text{C}$$

$$L_{1,\text{mpB}} = 25.4 \text{ mm} = 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$L_{2,\text{mpB}} = 25.4 \text{ mm} = 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$h_{\text{mpB}} = 9 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$\dot{Q}_C = 14 \text{ W}$$

$$T_{\text{max,C}} = 90^\circ\text{C}$$

$$R_{\text{c+d,C}} = 3^\circ\text{C}/\text{W}$$

– Determinare

Massima temperatura raggiunta dai microprocessori A e B e dal dispositivo C

– Ipotesi

Aria gas ideale.

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dai vari dispositivi.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si possono trascurare (in favore di sicurezza) gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile (oppure accumulabile nelle dissipazioni elettriche di vario tipo all'interno del cabinet) è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mpA} + \dot{Q}_{mpB} + \dot{Q}_C = 34.5 \text{ W}$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0058 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione di entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p (T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è compresa tra  $-10^\circ\text{C}$  e  $40^\circ\text{C}$ . Le condizioni più gravose si avranno, ovviamente, quando la temperatura ambiente è massima, da cui:

$$T_1 = 40^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 45.9^\circ\text{C}$$

La resistenza di contatto tra microprocessore A e relativo dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_{c,mpA} = \frac{R''_{c,mpA}}{A_{mpA}} = 0.875 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

Data la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ), la temperatura del microprocessore A in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mpA} = T_2 + (R_{c,mpA} + R_{d,mpA}) \dot{Q}_{mpA} = 75.4 \text{ }^\circ\text{C} < T_{max,mpA} = 85^\circ\text{C}$$

Il microprocessore A lavora in ogni caso a temperatura inferiore al limite operativo.

L'area della superficie superiore del microprocessore B, esposta all'aria in quanto il dispositivo è privo di dissipatore, vale:

$$A_{mpB} = L_{1,mpB} L_{2,mpB} = 6.45 \cdot 10^4 \text{ m}^2$$

Trascurando gli scambi termici sulle (piccole) superfici laterali, la resistenza alla trasmissione del calore tra microprocessore B e ambiente nel cabinet (il coefficiente di adduzione comprende sia gli effetti convettivi che quelli radiativi) è pari a:

$$R_{h,mpB} = \frac{1}{h_{mpB} A_{mpB}} = 172 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

La temperatura del microprocessore B in condizioni di carico massimo può essere anch'essa valutata mediante l'analogia elettrotermica:

$$T_{mpB} = T_2 + R_{h,mpB} \dot{Q}_{mpB} = 132^\circ\text{C} > T_{max,mpB} = 120^\circ\text{C}$$

Il microprocessore B non lavora in sicurezza.

La temperatura del dispositivo C in condizioni di carico massimo vale:

$$T_C = T_2 + R_{c+d,C} \dot{Q}_C = 87.9^\circ\text{C} < T_{\text{max},C} = 90^\circ\text{C}$$

La soluzione di raffreddamento è in teoria soddisfacente, ma porta il microprocessore a lavorare in condizioni molto prossime al limite operativo ed è quindi, nella pratica, da considerare con qualche riserva.

– Commenti

In linea di principio, una verifica della massima temperatura raggiungibile va effettuata per ogni componente presente in un sistema elettronico.

**Z.V. Influenza degli scambi termici attraverso le pareti di un cabinet**

– Problema

I dispositivi di aerazione interna di un cabinet per apparecchiature elettroniche assicurano una portata di 2.4 m<sup>3</sup>/min. Nel cabinet sono inseriti un microprocessore che dissipa fino a 55 W ed apparecchiature elettriche ed elettroniche di vario tipo che dissipano complessivamente altri 190 W. Il microprocessore è inoltre caratterizzato da temperatura massima ammissibile 65°C e superficie di scambio 1.3 cm<sup>2</sup>, ed è raffreddato mediante un dissipatore di calore a superficie alettata con resistenza termica 0.35°C/W e resistenza di contatto 0.00002 m<sup>2</sup>·°C/W tra dissipatore e microprocessore, riferita all'unità di superficie. Stimare la massima temperatura raggiunta dal microprocessore, verificando che questo operi in sicurezza. Inoltre, assumendo la temperatura media dell'aria nel cabinet pari alla media aritmetica delle temperature in ingresso e in uscita precedentemente calcolate, stimare la potenza termica trasmessa attraverso le pareti (tipicamente trascurata in favore di sicurezza).

Il cabinet presenta dimensioni esterne 40 cm x 80 cm x 25 cm, spessore di parete 0.5 mm e conduttività termica di parete 16 W/(m·°C); tutte le sue superfici sono libere ed i coefficienti di adduzione interno ed esterno valgono, rispettivamente, 15 W/(m<sup>2</sup>·°C) e 10 W/(m<sup>2</sup>·°C). Si assumano per l'aria una densità pari a 1.16 kg/m<sup>3</sup>, un calore specifico a pressione costante pari a 1007 J/(kg·°C), ed una temperatura nell'ambiente esterno di 30°C.

– Dati

$$\dot{V} = 2.4 \text{ m}^3/\text{min} = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{Q}_{\text{mp}} = 55 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{\text{alia}} = 190 \text{ W}$$

$$T_{\text{mp,max}} = 65^\circ\text{C}$$

$$A_{\text{mp}} = 1.3 \text{ cm}^2 = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_d = 0.35^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_c'' = 0.00002 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$\rho = 1.16 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1007 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$T_{\text{amb}} = 30^\circ\text{C}$$

$$L_1 = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$$

$$L_2 = 80 \text{ cm} = 0.80 \text{ m}$$

$$L_3 = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

$$s_p = 0.5 \text{ mm} = 0.0005 \text{ m}$$

$$\lambda_p = 16 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$$

$$h_i = 15 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$$

$$h_e = 10 \text{ W/(m}^2\cdot\text{°C)}$$

– Determinare

Massima temperatura raggiunta dal microprocessore

$\dot{Q}_p$  trasmessa attraverso le pareti del cabinet

– Ipotesi

Aria gas ideale, coefficienti di convezione uniformi sulle pareti del cabinet,  $T_i = (T_1 + T_2)/2$

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dal microprocessore.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si trascurano, in prima approssimazione e in favore di sicurezza, gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} = 245 \text{ W}$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0464 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione di entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p(T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria aspirata nel cabinet è pari alla temperatura dell'aria nell'ambiente esterno:

$$T_1 = T_a = 30^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 35.2^\circ\text{C}$$

Dati la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ) ed il dissipatore di calore con la sua resistenza termica  $R_d$ , la temperatura del microprocessore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp}$$

La resistenza di contatto microprocessore-dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_c = \frac{R_c''}{A_{mp}} = 0.154 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

In definitiva, la temperatura massima del processore sarà pari a

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 63^\circ\text{C} < T_{mp,max} = 65^\circ\text{C}$$

La soluzione di raffreddamento è soddisfacente, ma porta il microprocessore a lavorare in condizioni molto prossime al limite operativo ed è quindi, nella pratica, da considerare con qualche riserva.

La potenza termica trasmessa attraverso le pareti del cabinet si può in prima approssimazione stimare mediante il prodotto della resistenza termica delle pareti stesse per la differenza tra la temperatura media dell'aria nel cabinet e la temperatura dell'aria esterna. La temperatura media dell'aria all'interno del cabinet si assume per ipotesi pari a:

$$T_i = \frac{(T_1 + T_2)}{2} = 32.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di convezione) è equivalente alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. La superficie esterna del cabinet è pari a:

$$A_e = 2 \cdot (L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) = 1.24 \text{ m}^2$$

La resistenza convettiva esterna vale:

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = 0.0806 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

Il virtù del ridotto spessore delle pareti è lecito assimilare l'area della sezione di passaggio del calore per conduzione attraverso le pareti e l'area della superficie interna delle stesse all'area della superficie esterna:

$$A_p \cong A_i \cong A_e = 1.24 \text{ m}^2$$

La resistenza conduttiva delle pareti vale quindi:

$$R_p = \frac{s_p}{\lambda_p A_p} = 0.000025 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

La resistenza convettiva interna vale:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = 0.0538 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza totale alla trasmissione del calore delle pareti è pari alla somma delle singole resistenze:

$$R = R_e + R_p + R_i = 0.134 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In conclusione, la potenza termica trasmessa attraverso le pareti vale:

$$\dot{Q}_p = \frac{T_i - T_a}{R} = 19.5 \text{ W}$$

– Commenti

Il valore calcolato rappresenta circa l' 8% della potenza termica da estrarre dal cabinet. Averla trascurata assicura un qualche margine di sicurezza. Infatti, volendone tenerne conto, si ricava:

$$\dot{Q}' = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} - \dot{Q}_p = 225.5 \text{ W}$$

$$T_2' = T_1 + \frac{\dot{Q}'}{\dot{m}c_p} = 34.8^\circ\text{C}$$

$$T_{mp}' = T_2' + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 62.5^\circ\text{C}$$

Il risultato è, seppur di poco, più favorevole. Il calcolo può essere inoltre rifinito con una procedura di tipo iterativo:

$$T_i' = \frac{(T_1 + T_2')}{2} = 32.4^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q}'_p = \frac{T_i' - T_a}{R} = 17.9 \text{ W}$$

$$\dot{Q}'' = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} - \dot{Q}'_p = 227.1 \text{ W}$$

$$T_2'' = T_1 + \frac{\dot{Q}''}{\dot{m}c_p} = 34.9^\circ\text{C}$$

$$T_{mp}'' = T_2'' + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 62.5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La procedura converge molto rapidamente ( $T_{mp}'' \cong T_{mp}'$ ).

Assumere un valore della temperatura interna dell'aria pari alla media aritmetica delle temperature in ingresso e in uscita rappresenta un'approssimazione tipicamente ragionevole.

La resistenza termica conduttiva di parete è in genere trascurabile, specie se le pareti del cabinet sono realizzate in metallo (conduttività termica > 10 W/(m·°C), spessori di parete tipici < 1mm).

**Z.VI. Sistema elettronico con dispositivo di raffreddamento a liquido**

– Problema

Un processore ad elevate prestazioni, che in condizioni di massimo carico assorbe una potenza pari a 85 W elettrici ed è caratterizzato da temperatura massima ammissibile 80°C,

viene raffreddato mediante un dissipatore di calore a liquido. Il dissipatore è costituito da un blocchetto in materiale metallico altamente conduttivo, al cui interno è ricavata una canalizzazione circolare con diametro 2 mm e sviluppo longitudinale totale 36 mm. Nella canalizzazione fluisce una corrente d'acqua con portata 600 mL/min e temperatura in ingresso 28°C. Il coefficiente di scambio termico convettivo sulle superfici della canalizzazione è pari a 15000 W/(m<sup>2</sup>·°C). Il dissipatore è posto in contatto diretto con la superficie superiore del processore; la resistenza di contatto tra dissipatore e processore, riferita all'unità di superficie, è pari a 0.4 °C·cm<sup>2</sup>/W, l'area della superficie di contatto è pari a 180 mm<sup>2</sup>. Trascurando, in favore di sicurezza, le dispersioni di calore attraverso superfici diverse da quella di contatto, ed assumendo trascurabile anche la ridotta resistenza di forma per conduzione tra superficie di contatto e superfici delle canalizzazioni, in virtù dell'elevata conduttività del materiale metallico con cui è realizzato il dissipatore, stimare:

- a) temperatura in uscita dell'acqua
- b) massima temperatura raggiunta dal processore

Si assumano per l'acqua una densità di 1000 kg/m<sup>3</sup> ed un calore specifico di 4190 J/(kg·°C).

– Dati

$$\dot{Q}_p = 85 \text{ W}$$

$$T_{p,\max} = 80^\circ\text{C}$$

$$\dot{V} = 600 \text{ L/min} = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$T_{\text{in}} = 28^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 4190 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$$

$$D = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$$

$$L = 36 \text{ mm} = 0.036 \text{ m}$$

$$h_i = 15000 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}$$

$$R_c'' = 0.4 \text{ cm}^2\cdot^\circ\text{C/W} = 0.00004 \text{ m}^2\cdot^\circ\text{C/W}$$

$$A_c = A_{p,\text{sup}} = 180 \text{ mm}^2 = 1.80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

– Determinare

Temperatura in uscita dell'acqua

Massima temperatura raggiunta dal processore

– Ipotesi

Coefficiente di convezione omogeneo, resistenza di contatto omogenea, proprietà del fluido costanti, dispersioni di calore attraverso le superfici diverse da quelle di contatto trascurabili nel processore e nel dissipatore, resistenze di forma per conduzione trascurabili nel dissipatore, condizioni stazionarie.

– Soluzione

Il problema si risolve partendo con la valutazione della massima temperatura che l'acqua può raggiungere nel dissipatore di calore e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dal processore.

Il dissipatore costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_{\text{out}} - h_{\text{in}} + \frac{w_{\text{out}}^2 - w_{\text{in}}^2}{2} + g(z_{\text{out}} - z_{\text{in}}) \right]$$

Nel caso in esame, si trascurano per ipotesi gli scambi termici attraverso le superfici diverse da quella di contatto con il processore. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime per l'acqua le variazioni di velocità (la sezione di passaggio è costante e i liquidi sono incomprimibili) e di quota, che vengono quindi trascurate. I dispositivi di pompaggio eventuali non sono collocati nel dissipatore e non entrano nel computo. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q}_p = \dot{m}(h_{\text{out}} - h_{\text{in}})$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0464 \text{ kg/s}$$

Per un liquido, la variazione di entalpia può essere stimata come segue:

$$h_{\text{out}} - h_{\text{in}} = \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} c(T) dT \cong c(T_{\text{out}} - T_{\text{in}})$$

Pertanto, la massima temperatura dell'acqua nel dissipatore, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_{\text{out}} = T_{\text{in}} + \frac{\dot{Q}_p}{\dot{m}c} = 30^\circ\text{C}$$

Data la temperatura massima dell'acqua di raffreddamento ( $T_{\text{out}}$ ), la temperatura del processore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_p = T_{\text{out}} + (R_c + R_i) \dot{Q}_p$$

Si sono trascurate per ipotesi le resistenze alla conduzione del calore all'interno del materiale metallico del dissipatore. La resistenza di contatto processore-dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_c = \frac{R_c''}{A_c} = 0.22 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

La superficie di scambio termico convettivo nei condotti del dissipatore di calore vale:

$$A_i = \pi \cdot DL = 2.26 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La resistenza convettiva interna vale quindi:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = 0.29 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

In definitiva, la temperatura massima del processore sarà pari a:

$$T_p = T_{\text{out}} + (R_c + R_i) \dot{Q}_p = 74^\circ\text{C} < T_{p,\text{max}} = 80^\circ\text{C}$$

La soluzione di raffreddamento è soddisfacente.

– *Commenti*

Impiegando un liquido in convezione forzata, si ottengono valori elevatissimi del coefficiente di convezione.

Il raffreddamento a liquido è in generale più efficiente di quello ad aria, ma comporta significative complicazioni del sistema: si deve scongiurare il rischio di perdite di liquido, che avrebbero conseguenze deleterie; inoltre, vanno previsti uno scambiatore di calore esterno, per raffreddare l'acqua, ed una pompa per farla circolare.

**Z.VII. Influenza degli scambi termici attraverso le pareti di un cabinet (2)**– *Problema*

I dispositivi di aerazione interna di un cabinet per apparecchiature elettroniche assicurano una portata di 45 m<sup>3</sup>/h. Nel cabinet sono inseriti un microprocessore che dissipa fino a 50 W ed apparecchiature elettriche ed elettroniche di vario tipo che dissipano complessivamente altri 220 W. Il microprocessore è caratterizzato da temperatura massima ammissibile 85°C e superficie di scambio 120 mm<sup>2</sup>, ed è raffreddato mediante un dissipatore di calore a superficie alettata con resistenza termica 0.4°C/W e resistenza di contatto 0.3·10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup>·°C/W tra dissipatore e microprocessore, riferita all'unità di superficie. Il cabinet presenta dimensioni esterne 430 mm x 860 mm x 215 mm, spessore di parete 1.5 mm e conduttività termica di parete 16.5 W/(m·°C); tutte le superfici interne ed esterne sono libere ed i coefficienti di adduzione interno ed esterno valgono, rispettivamente, 15 W/(m<sup>2</sup>·°C) e 9 W/(m<sup>2</sup>·°C).

Assumendo, ai fini della stima degli scambi termici attraverso le pareti, che la temperatura media dell'aria entro il cabinet sia pari alla media aritmetica delle temperatura in ingresso e della temperatura che si avrebbe in uscita considerando le pareti adiabatiche, stimare la massima temperatura raggiunta dal microprocessore e verificare che questo operi in sicurezza.

Si assumano per l'aria una densità pari a 1.15 kg/m<sup>3</sup>, un calore specifico a pressione costante pari a 1006 J/(kg·°C), ed una temperatura nell'ambiente esterno di 35°C.

– *Dati*

$$\dot{V} = 45 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0125 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{Q}_{\text{mp}} = 50 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{\text{alia}} = 220 \text{ W}$$

$$T_{\text{mp,max}} = 85^\circ\text{C}$$

$$A_{\text{mp}} = 120 \text{ mm}^2 = 1.20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_d = 0.4^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$R_c'' = 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$L_1 = 430 \text{ mm} = 0.430 \text{ m}$$

$$L_2 = 860 \text{ mm} = 0.860 \text{ m}$$

$$L_3 = 215 \text{ mm} = 0.215 \text{ m}$$

$$s_p = 1.5 \text{ mm} = 0.0015 \text{ m}$$

$$\lambda_p = 16.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$h_i = 15 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

$$h_e = 9 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$$

$$\rho = 1.15 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 1006 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$$

$$T_{\text{amb}} = 35 \text{ °C}$$

– Determinare

Massima temperatura raggiunta dal microprocessore

– Ipotesi

Aria gas ideale, coefficienti di convezione omogenei sulle pareti del cabinet, superfici interne ed esterne completamente libere,  $T_i = (T_1 + T_2)/2$

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dal microprocessore.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si trascurano, in prima approssimazione, gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

Trascurando gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet, la potenza termica complessivamente fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita e dissipata dai dispositivi elettronici:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{mp}} + \dot{Q}_{\text{alia}} = 270 \text{ W}$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0144 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione di entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p(T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria aspirata nel cabinet è pari alla temperatura dell'aria nell'ambiente esterno:

$$T_1 = T_a = 35 \text{ °C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 53.7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Si rammenta che il risultato è ottenuto trascurando gli scambi termici attraverso le pareti del cabinet.

Dati la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ) ed il dissipatore di calore con la sua resistenza termica  $R_d$ , la temperatura del microprocessore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp}$$

La resistenza di contatto microprocessore-dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_c = \frac{R_c''}{A_{mp}} = 0.25 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Nelle condizioni considerate, la temperatura massima che il processore può raggiungere risulterebbe essere pari a

$$T_{mp} = T_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 53.7 + (0.25 + 0.4) \cdot 50 = 86.2^\circ\text{C} > T_{mp,max} = 85^\circ\text{C}$$

La soluzione di raffreddamento non sembrerebbe soddisfacente, poiché potrebbe portare il microprocessore a lavorare oltre i suoi limiti operativi. Peraltro, non si è finora presa in considerazione la potenza termica trasmessa attraverso le pareti del cabinet, che porterebbe ad una riduzione del carico termico complessivo del sistema. Tale potenza si può in prima approssimazione stimare mediante il prodotto della resistenza termica delle pareti stesse per la differenza tra la temperatura media dell'aria all'interno del cabinet e la temperatura esterna. La temperatura media dell'aria nel cabinet si assume per ipotesi pari a:

$$T_i = \frac{(T_1 + T_2)}{2} = \frac{(35 + 53.7)}{2} = 44.3^\circ\text{C}$$

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di convezione) è equivalente alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. La superficie esterna del cabinet è pari a:

$$A_e = 2 \cdot (L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) = 1.29 \text{ m}^2$$

La resistenza convettiva esterna vale:

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = 0.0858 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Il virtù del ridotto spessore delle pareti è lecito assimilare l'area della sezione di passaggio del calore per conduzione attraverso le pareti e l'area della superficie interna delle stesse all'area della superficie esterna:

$$A_p \cong A_i \cong A_e = 1.29 \text{ m}^2$$

La resistenza conduttiva delle pareti vale quindi:

$$R_p = \frac{s_p}{\lambda_p A_p} = 0.00007 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza convettiva interna vale:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = 0.0515 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza totale alla trasmissione del calore delle pareti è pari alla somma delle singole resistenze:

$$R = R_e + R_p + R_i = 0.137 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In conclusione, la potenza termica trasmessa attraverso le pareti vale:

$$\dot{Q}_p = \frac{T_i - T_a}{R} = \frac{44.3 - 35}{0.137} = 67.9 \text{ W}$$

Il valore calcolato rappresenta circa il 25% della potenza termica da estrarre dal cabinet, motivo per cui il margine di sicurezza che si ottiene trascurandola può essere eccessivo. È quindi opportuno ricalcolare la potenza termica complessivamente fornita all'aria, sottraendo alla potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici la potenza termica scambiata attraverso le pareti del cabinet

$$\dot{Q}' = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} - \dot{Q}_p = 202.1 \text{ W}$$

Pertanto, un valore un po' più accurato della massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, è:

$$T'_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}'}{\dot{m}c_p} = 49.0^\circ\text{C}$$

In conclusione, la temperatura massima che il processore può raggiungere è pari a

$$T'_{mp} = T'_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 49.0 + (0.25 + 0.4) \cdot 50 = 81.5^\circ\text{C} < T_{mp,max} = 85^\circ\text{C}$$

Se si tiene conto degli scambi termici attraverso le pareti, la soluzione di raffreddamento si rivela soddisfacente, anche se porta il microprocessore a lavorare in condizioni abbastanza prossime al limite operativo.

– Commenti

Il calcolo può essere ulteriormente perfezionato ricalcolando la temperatura media dell'aria all'interno del cabinet sulla base della nuova temperatura calcolata in uscita:

$$T'_i = \frac{(T_1 + T'_2)}{2} = \frac{(35 + 49.0)}{2} = 42.0^\circ\text{C}$$

Sulla base di tale temperatura si possono quindi ricalcolare la potenza termica trasmessa attraverso le pareti e la potenza termica complessivamente fornita all'aria:

$$\dot{Q}'_p = \frac{T'_i - T_a}{R} = \frac{42.0 - 35}{0.137} = 50.8 \text{ W}$$

$$\dot{Q}'' = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} - \dot{Q}'_p = 219.2 \text{ W}$$

Pertanto, un valore ancora più accurato della massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene sempre raggiunta in prossimità dell'uscita, è:

$$T''_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}''}{\dot{m}c_p} = 50.2^\circ\text{C}$$

In conclusione, la temperatura massima che il processore può raggiungere è pari a

$$T''_{mp} = T''_2 + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 50.2 + (0.25 + 0.4) \cdot 50 = 82.7^\circ\text{C}$$

La seconda iterazione ha portato ad una modifica del risultato precedentemente ottenuto non trascurabile, ma tuttavia molto più ridotta rispetto alla prima iterazione. Ogni successiva iterazione porterà a correzioni sempre più modeste, fino a raggiungere asintoticamente il valore “esatto” (nei limiti delle approssimazioni effettuate). Infatti, una terza iterazione restituisce:

$$T'' = T_i = \frac{(T_1 + T_2'')}{2} = \frac{(35 + 50.2)}{2} = 42.6^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q}_p'' = \frac{T_i'' - T_a}{R} = \frac{42.6 - 35}{0.137} = 55.1 \text{ W}$$

$$\dot{Q}''' = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} - \dot{Q}_p'' = 214.9 \text{ W}$$

$$T_2''' = T_1 + \frac{\dot{Q}'''}{\dot{m}c_p} = 49.9^\circ\text{C}$$

$$T_{mp}''' = T_2''' + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 49.9 + (0.25 + 0.4) \cdot 50 = 82.4^\circ\text{C}$$

## Z.VIII. Valutazione della portata di aerazione

### – Problema

In un cabinet per apparecchiature elettroniche sono inseriti un microprocessore che dissipa fino a 28 W ed apparecchiature elettriche ed elettroniche di vario tipo che dissipano complessivamente altri 150 W. Il microprocessore è caratterizzato da temperatura massima ammissibile 90°C e superficie di scambio 185 mm<sup>2</sup>, ed è raffreddato mediante un dissipatore di calore a superficie alettata con resistenza termica 0.3°C/W e resistenza di contatto 0.2 cm<sup>2</sup>·°C/W tra dissipatore e microprocessore, riferita all'unità di superficie. Al solo fine della stima degli scambi termici attraverso le pareti, che non vanno quindi considerate adiabatiche, si valuti la temperatura media dell'aria entro il cabinet come la media aritmetica delle temperature in ingresso e in uscita. Il cabinet presenta dimensioni esterne 500 mm x 500 mm x 375 mm, spessore di parete 2.5 mm e conduttività termica di parete 1.2 W/(m·°C); tutte le superfici interne ed esterne sono libere ed i coefficienti di adduzione interno ed esterno valgono, rispettivamente, 12 W/(m<sup>2</sup>·°C) e 10 W/(m<sup>2</sup>·°C). Stimare la minima portata volumica (in m<sup>3</sup>/h) che i dispositivi d'aerazione interna del cabinet devono assicurare affinché il processore si mantenga sempre ad una temperatura inferiore di almeno 15°C al valore massimo ammissibile.

Si assumano per l'aria una densità pari a 1.08 kg/m<sup>3</sup>, un calore specifico a pressione costante pari a 1.008 kJ/(kg·°C), ed una temperatura nell'ambiente esterno di 40°C.

### – Dati

$$\dot{Q}_{mp} = 28 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{alia} = 150 \text{ W}$$

$$T_{mp,max} = 90^\circ\text{C}$$

$$A_{mp} = 185 \text{ mm}^2 = 1.85 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_d = 0.3^\circ\text{C/W}$$

$$R_c'' = 0.2 \text{ cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$\rho = 1.08 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1.008 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}) = 1008 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$T_{\text{amb}} = 40^\circ\text{C}$$

$$L_1 = 500 \text{ mm} = 0.500 \text{ m}$$

$$L_2 = 500 \text{ mm} = 0.500 \text{ m}$$

$$L_3 = 375 \text{ mm} = 0.375 \text{ m}$$

$$s_p = 2.5 \text{ mm} = 0.0015 \text{ m}$$

$$\lambda_p = 1.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$h_i = 12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$h_e = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$\Delta T_{\text{mp,max}} = 15^\circ\text{C}$$

– Determinare

Minima portata volumica richiesta, in  $\text{m}^3/\text{h}$

– Ipotesi

Aria gas ideale, coefficienti di convezione omogenei sulle pareti del cabinet, superfici interne ed esterne completamente libere, temperature interna  $T_i = (T_1 + T_2)/2$ .

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la minima portata richiesta al dispositivo di ventilazione.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, le variazioni di energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e vengono quindi trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente fornita all'aria si ottiene sottraendo alla potenza elettrica complessivamente assorbita, e dissipata sotto forma di calore, dai dispositivi elettronici quella scambiata attraverso le pareti del cabinet (che, in questo caso, non si vuole trascurare).

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{mp}} + \dot{Q}_{\text{alia}} - Q_p$$

Per arrivare alla stima della potenza termica scambiata attraverso le pareti, incognita, sono necessari alcuni passaggi preparatori.

Dato il margine di sicurezza  $\Delta T_{mp,max}$  che si richiede rispetto alla massima temperatura ammissibile del processore,  $T_{mp,max}$ , la massima temperatura a cui si vuole esporre il processore stesso è pari a:

$$T_{mp} = T_{mp,max} - \Delta T_{mp,max} = 90 - 15 = 75^\circ\text{C}$$

A partire da tale valore, la massima temperatura che, in condizioni di carico massimo, non deve essere superata dall'aria che lambisce il processore è valutabile mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{mp} = T_{aria,max} + (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp}$$

Va rammentato che la temperatura massima dell'aria all'interno del cabinet si raggiunge tipicamente in corrispondenza delle aperture di espulsione, in prossimità delle quali è opportuno supporre collocato, in favore di sicurezza, il microprocessore. La massima temperatura che non deve essere superata dall'aria che lambisce il processore coincide quindi con la temperatura dell'aria espulsa dal cabinet.

La resistenza termica  $R_d$  del dissipatore è nota, mentre la resistenza di contatto microprocessore-dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_c = \frac{R_c''}{A_{mp}} = 0.108 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

Pertanto, la temperatura dell'aria in efflusso dal cabinet,  $T_2$ , dovrà essere pari a:

$$T_2 \equiv T_{aria,max} = T_{mp} - (R_c + R_d)\dot{Q}_{mp} = 75 - (0.108 + 0.3) \cdot 28 = 63.6^\circ\text{C}$$

La temperatura dell'aria aspirata nel cabinet è invece pari alla temperatura dell'aria nell'ambiente esterno:

$$T_1 = T_a = 40 \text{ }^\circ\text{C}$$

Per valutare il carico termico del sistema, è necessario stimare la potenza termica trasmessa attraverso le pareti del cabinet. Tale potenza si può in prima approssimazione calcolare come il prodotto della resistenza termica delle pareti stesse per la differenza tra la temperatura media dell'aria nel cabinet e la temperatura esterna. La temperatura media dell'aria nel cabinet si assume per ipotesi pari alla media aritmetica delle temperature in ingresso e in uscita:

$$T_i = \frac{(T_1 + T_2)}{2} = \frac{(40 + 63.6)}{2} = 51.8 \text{ }^\circ\text{C}$$

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di convezione) è equivalente alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto. La superficie esterna del cabinet è pari a:

$$A_e = 2 \cdot (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) = 1.25 \text{ m}^2$$

La resistenza adduttiva esterna vale:

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = 0.0667 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

Il virtù del ridotto spessore delle pareti, è lecito assimilare all'area della superficie esterna delle pareti stesse le aree della sezione di passaggio del calore per conduzione e della superficie interna:

$$A_p \cong A_i \cong A_e = 1.25 \text{ m}^2$$

La resistenza conduttiva delle pareti vale quindi:

$$R_p = \frac{S_p}{\lambda_p A_p} = 0.0017 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza adduttiva interna vale:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = 0.0800 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La resistenza totale alla trasmissione del calore delle pareti è pari alla somma delle singole resistenze:

$$R = R_e + R_p + R_i = 0.148 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso le pareti vale, quindi:

$$\dot{Q}_p = \frac{T_i - T_a}{R} = \frac{51.8 - 40}{0.148} = 79.5 \text{ W}$$

In definitiva, la potenza termica complessivamente fornita all'aria vale:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mp} + \dot{Q}_{alia} - \dot{Q}_p = 28 + 150 - 79.5 = 98.5 \text{ W}$$

Per stimare la portata minima dell'aria di ventilazione, si può considerare che il processo avviene a pressione pressoché costante, o che l'aria, in condizioni ambientali tipiche, è assimilabile ad un gas perfetto. Da ciò si ottiene:

$$\dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{m} \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong \dot{m} c_p (T_2 - T_1) = \dot{Q}$$

In conclusione, la portata minima dell'aria di ventilazione vale, in massa,

$$\dot{m} \cong \frac{\dot{Q}}{c_p (T_2 - T_1)} = \frac{98.5}{1008 \cdot (63.6 - 40)} = 0.00415 \text{ kg/s}$$

e, in volume,

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = 0.00384 \text{ m}^3/\text{s} = 13.8 \text{ m}^3/\text{h}$$

– Commenti

La resistenza alla conduzione delle pareti, in questo caso realizzate con un materiale non metallico (il valore della conduttività termica dato è comparabile a quello tipico di materiali plastici rigidi), è ancora una volta piccola, ma non del tutto trascurabile.

Il coefficiente di adduzione congloba gli effetti convettivi e radiativi.

**Z.IX. Verifica termica dei componenti di un sistema elettronico (2)**

– Problema

Un computer server integra due processori, che dissipano fino a 67 W ciascuno, nonché apparecchiature elettriche ed elettroniche di vario tipo, che dissipano complessivamente altri 300 W. Ognuno dei processori presenta temperatura massima ammissibile 70°C e superficie di scambio termico 210 mm<sup>2</sup>. Il loro raffreddamento è assicurato da dissipatori di calore a

superficie alettata che presentano resistenza termica  $0.30^{\circ}\text{C}/\text{W}$ . La resistenza di contatto dissipatore/processore, riferita all'unità di superficie, è pari a  $0.4 \text{ cm}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}/\text{W}$ . Il dispositivo d'aerazione interna del server assicura una portata di  $5 \text{ m}^3/\text{min}$  d'aria. La temperatura nel locale in cui il server è installato è mantenuta stabilmente tra  $22^{\circ}\text{C}$  e  $36^{\circ}\text{C}$ . Si assumano per l'aria densità pari a  $1.15 \text{ kg}/\text{m}^3$  e calore specifico a pressione costante pari a  $1007 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$ . Stimare la massima temperatura raggiunta dai processori.

– Dati

$$N_{\text{CPU}} = 2$$

$$\dot{Q}_{\text{CPU}} = 67 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{\text{alia}} = 300 \text{ W}$$

$$T_{\text{max,CPU}} = 70^{\circ}\text{C}$$

$$A_{\text{CPU}} = 210 \text{ mm}^2 = 2.10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_{\text{d,CPU}} = 0.30^{\circ}\text{C}/\text{W}$$

$$R_{\text{c,CPU}} = 0.4 \text{ cm}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}/\text{W} = 0.00004 \text{ m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}/\text{W}$$

$$\dot{V} = 5 \text{ m}^3/\text{min} = 0.083 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$T_{\text{amb,min}} = 22^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{amb,max}} = 36^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 1.16 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1006 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$$

– Determinare

Massima temperatura dei processori

– Ipotesi

Aria gas ideale

– Soluzione

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel cabinet e, a partire da questa, la massima temperatura raggiungibile dai processori.

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si possono trascurare (in favore di sicurezza) gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni d'energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e possono quindi essere anch'esse trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile (oppure accumulabile nelle dissipazioni elettriche di vario tipo all'interno del cabinet) è anche il lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

La potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita:

$$\dot{Q} = N_{\text{CPU}} \dot{Q}_{\text{CPU}} + \dot{Q}_{\text{alia}} = 434 \text{ W}$$

La portata in massa vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0958 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione d'entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p (T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è compresa tra 22°C e 36°C. Le condizioni più gravose si avranno, ovviamente, quando la temperatura ambiente è massima, da cui:

$$T_1 = 36^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 40.5^\circ\text{C}$$

La resistenza di contatto tra un processore ed il relativo dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_{c,\text{CPU}} = \frac{R''_{c,\text{CPU}}}{A_{\text{CPU}}} = 0.19 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

Data la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ), la temperatura di un processore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{\text{CPU}} = T_2 + (R_{c,\text{CPU}} + R_{d,\text{CPU}}) \dot{Q}_{\text{CPU}} = 73.4 \text{ }^\circ\text{C} > T_{\text{max,CPU}} = 70^\circ\text{C}$$

Evidentemente, la temperatura è superiore a quella massima ammissibile, perciò possono verificarsi condizioni in cui i due processori non lavorano in sicurezza e possono incorrere in malfunzionamenti o danneggiamenti.

– Commenti

Essendo i processori ed i loro sistemi di dissipazione identici, la verifica della massima temperatura operativa dei processori, a partire dalla massima temperatura raggiunta dall'aria nel sistema, può essere svolta facendo riferimento ad un solo processore.

La soluzione di raffreddamento non è in teoria soddisfacente, ma di poco. Poiché si sono applicate svariate semplificazioni in favore di sicurezza come, ad esempio, il considerare le pareti del cabinet adiabatiche, o i processori posizionati in prossimità delle aperture di estrazione dell'aria, una verifica più dettagliata potrebbe dimostrare che la soluzione di raffreddamento è in realtà accettabile.

**Z.X. Verifica termica dei componenti di un sistema elettronico (3)**– Problema

Un computer integra un processore che dissipa fino a 39 W, nonché apparecchiature elettriche ed elettroniche di vario tipo che dissipano complessivamente altri 200 W. Il processore presenta temperatura massima ammissibile  $65^{\circ}\text{C}$  e superficie di scambio termico  $400\text{ mm}^2$ , il suo raffreddamento è assicurato da un dissipatore di calore a superficie alettata con resistenza termica  $0.6^{\circ}\text{C/W}$ ; la resistenza di contatto dissipatore/processore, riferita all'unità di superficie, è pari a  $0.5\text{ cm}^2\cdot^{\circ}\text{C/W}$ . Il dispositivo d'aerazione interna del computer assicura una portata di  $180\text{ m}^3/\text{ora}$  d'aria. Il locale in cui il computer è installato, che presenta volume interno  $4.00 \times 4.00 \times 2.80\text{ m}^3$ , non è areato ed è completamente circondato da ambienti a temperatura  $25^{\circ}\text{C}$ ; le pareti presentano spessore  $12\text{ cm}$  e conduttività termica  $0.45\text{ W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ ; il coefficiente di scambio termico medio sulle superfici, interne e esterne, di tutte le pareti si può stimare pari a  $8\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$ . Si assumano per l'aria densità pari a  $1.15\text{ kg}/\text{m}^3$  e calore specifico a pressione costante pari a  $1007\text{ J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$ .

Calcolare la massima temperatura dell'aria nel locale e la massima temperatura del processore.

– Dati

$$\dot{Q}_{\text{CPU}} = 39\text{ W}$$

$$\dot{Q}_{\text{alia}} = 200\text{ W}$$

$$T_{\text{max,CPU}} = 65^{\circ}\text{C}$$

$$A_{\text{CPU}} = 400\text{ mm}^2 = 2.10 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$$

$$R_{\text{d,CPU}} = 0.6^{\circ}\text{C/W}$$

$$R''_{\text{c,CPU}} = 0.5\text{ cm}^2\cdot^{\circ}\text{C/W} = 0.00005\text{ m}^2\cdot^{\circ}\text{C/W}$$

$$\dot{V} = 180\text{ m}^3/\text{ora} = 0.050\text{ m}^3/\text{s}$$

$$T_e = 25^{\circ}\text{C}$$

$$L_1 = 4.00\text{ m}$$

$$L_2 = 4.00\text{ m}$$

$$L_3 = 2.80\text{ m}$$

$$s_p = 12\text{ cm} = 0.12\text{ m}$$

$$\lambda_p = 0.45\text{ W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$$

$$h = h_i = h_e = 8\text{ W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$$

$$\rho = 1.15\text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c = 1007\text{ J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$$

– Determinare

Massima temperatura dell'aria nel locale, massima temperatura raggiungibile dal processore

– Ipotesi

Aria gas ideale, locale completamente circondato da altri ambienti, temperatura dell'aria nel locale uniforme, proprietà del materiale di parete uniformi, coefficienti di convezione uniformi sulle superfici, condizioni stazionarie.

– *Soluzione*

Il problema si risolve nel valutare la massima temperatura che l'aria può raggiungere nel locale, quindi la massima temperatura che l'aria può raggiungere all'interno del cabinet e, infine, la massima temperatura raggiungibile dal processore.

Il locale costituisce un sistema chiuso, che può scambiare calore attraverso le sue pareti. In condizioni stazionarie, tutta la potenza termica prodotta dal computer (nell'ipotesi che questo sia il solo dispositivo presente soggetto a dissipazione termica) deve essere trasferita all'esterno.

$$\frac{(T_i - T_e)}{R} = \dot{Q} = \dot{Q}_{\text{CPU}} + \dot{Q}_{\text{alia}} = 239 \text{ W}$$

in cui R è la resistenza complessiva delle pareti alla trasmissione del calore.

Se si osserva in sezione una qualunque delle pareti del locale, si può chiaramente vedere che questa non presenta in realtà una sezione di passaggio del calore uniforme rispetto allo spessore (vedi Es.E.VI). Il problema della trasmissione del calore è quindi multidimensionale. Ci si può tuttavia ricondurre al caso monodimensionale scegliendo, per ogni parete, un'opportuna area di riferimento, che si assumerà poi costante rispetto allo spessore.

In prima istanza, l'area di riferimento si potrebbe assumere pari all'area media della sezione di passaggio del calore, ovvero all'area della sezione di passaggio in corrispondenza della metà dello spessore. Tuttavia, prendendo a riferimento l'area della superficie interna, si ottiene un valore più elevato della resistenza alla trasmissione del calore delle pareti (che, in un problema come quello in esame, si vorrebbe minimizzare), operando così in favore di sicurezza.

In generale, la resistenza equivalente di un insieme di pareti che delimitano un vano e presentano identiche caratteristiche rispetto alla direzione normale alle loro superfici principali (materiali, spessori, coefficienti di convezione) è uguale alla resistenza di una singola parete con area di passaggio del calore pari alla somma delle aree delle pareti dell'insieme suddetto (vedi Es.E.VI).

$$A = 2 \cdot (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) = 2 \cdot (4.00 \cdot 4.00 + 4.00 \cdot 2.80 + 4.00 \cdot 2.80) = 76.8 \text{ m}^2$$

La resistenza termica complessiva delle pareti del locale considerato sarà quindi pari a:

$$R = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right) = 0.00673 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

In definitiva, la massima temperatura raggiungibile dall'aria nel locale vale:

$$T_i = T_e + R\dot{Q} = 25 + 0.00673 \cdot 239 = 26.6^\circ\text{C}$$

Il cabinet costituisce un sistema aperto con un ingresso ed una uscita, soggetto ad un flusso stazionario di fluido. La massima temperatura al suo interno può essere quindi stimata a partire dall'equazione di bilancio dell'energia (vedi Es.D.I-II):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right]$$

Nel caso in esame, si possono trascurare (in favore di sicurezza) gli scambi di calore attraverso le pareti del cabinet. Inoltre, le variazioni d'energia cinetica ed energia potenziale sono piccole, essendo minime le variazioni di velocità e di quota dell'aria, e possono quindi essere anch'esse trascurate. Tipicamente piccolo e, di conseguenza, trascurabile (oppure accumulabile nelle dissipazioni elettriche di vario tipo all'interno del cabinet) è anche il

lavoro fornito dai dispositivi di ventilazione. L'equazione di bilancio dell'energia assume pertanto la seguente forma semplificata:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

in cui la potenza termica complessivamente dissipata dai dispositivi elettronici e fornita all'aria (positiva nelle convenzioni termodinamiche) è pari alla potenza elettrica complessivamente assorbita, calcolata in precedenza.

La portata in massa di aria vale:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 0.0575 \text{ kg/s}$$

In condizioni ambiente tipiche, l'aria può essere considerata un gas perfetto. Peraltro, il processo avviene a pressione pressoché costante. La variazione d'entalpia può quindi essere valutata come segue:

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong c_p(T_2 - T_1)$$

La temperatura dell'aria nell'ambiente esterno è quella valutata in precedenza per il locale:

$$T_1 = T_i = 26.6^\circ\text{C}$$

Pertanto, la massima temperatura dell'aria all'interno cabinet, che viene raggiunta in prossimità dell'uscita, vale:

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 30.7^\circ\text{C}$$

La resistenza di contatto tra processore e relativo dissipatore è valutabile come segue (vedi Es.E.XI):

$$R_{c,CPU} = \frac{R''_{c,CPU}}{A_{CPU}} = 0.13 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

Data la temperatura massima dell'aria di raffreddamento ( $T_2$ ), la temperatura del processore in condizioni di carico massimo può essere valutata mediante l'analogia elettrotermica (vedi Es.E.X-XII):

$$T_{CPU} = T_2 + (R_{c,CPU} + R_{d,CPU})\dot{Q}_{CPU} = 59.0 \text{ }^\circ\text{C} < T_{max,CPU} = 65^\circ\text{C}$$

– Commenti

Se il locale fosse stato molto più piccolo, ad esempio  $1.50 \times 1.00 \times 2.20 \text{ m}^2$ , si sarebbe avuto:

$$A = 2 \cdot (L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) = 2 \cdot (1.50 \cdot 1.00 + 1.50 \cdot 2.20 + 1.00 \cdot 2.20) = 14 \text{ m}^2$$

$$R = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{s_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e} \right) = 0.0369 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

$$T_1 \equiv T_i = T_e + R\dot{Q} = 25 + 0.0369 \cdot 239 = 33.8^\circ\text{C}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p} = 37.9^\circ\text{C}$$

$$T_{CPU} = T_2 + (R_{c,CPU} + R_{d,CPU})\dot{Q}_{CPU} = 66.2 \text{ }^\circ\text{C} > T_{max,CPU} = 65^\circ\text{C}$$

Chiudere un computer in un ripostiglio non ventilato può riservare spiacevoli sorprese.