



1



La deformazione rappresenta la risposta del materiale alle sollecitazioni

Quando un materiale viene sollecitato da una forza (**carico**) esso subisce una deformazione.



Se il carico è di piccola intensità, la deformazione è proporzionale al carico. Inoltre la deformazione si annulla quando il carico si annulla.

La deformazione è governata dalle proprietà meccaniche del corpo.

La proporzionalità tra deformazione e carico costituisce

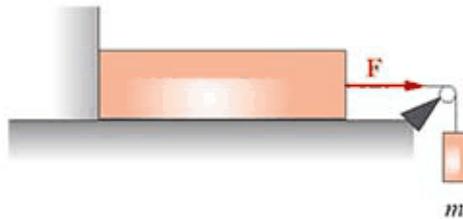
la legge di Hooke

2

Trazione e compressione

Una barra solida omogenea è posata su un tavolo e bloccata ad un'estremità. All'altra estremità viene applicata una forza di modulo F , (dovuta alla forza peso della massa m).

In questo caso **il carico è di trazione**, si ha una deformazione e si raggiunge un equilibrio in cui la reazione elastica della sbarra eguaglia la forza applicata.



Se la barra subisce l'azione di una forza di verso contrario, si parla di **compressione**

3

DEFINIAMO

Carico specifico σ : rapporto tra la forza applicata ortogonalmente ad una superficie (F) e la superficie stessa (S)

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Allungamento lineare unitario ϵ : allungamento subito da un materiale di lunghezza unitaria, ovvero rapporto tra l'allungamento (ΔL) e la lunghezza (L)

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

4

Secondo la legge di Hooke, carico specifico e allungamento unitario per piccoli valori del carico sono proporzionali ed il loro rapporto è definito come il **modulo di Young** o modulo di elasticità **E**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{ES} \rightarrow$$

$$E = \frac{F}{S} / \frac{\Delta L}{L}$$

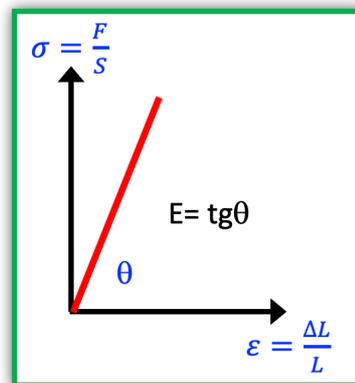
5

Il modulo di Young ($E = \frac{F}{S} / \frac{\Delta L}{L}$) è un parametro rappresentativo delle proprietà elastiche di un corpo:

Un alto valore di E determina, a parità di carico, un allungamento specifico minore

Dimensioni: $[E]=[F][L]^{-2}$ Unità di Misura: N/m^2

Nello studio delle proprietà elastiche dei corpi si fa uso di un grafico come questo.



6

Esercizio 1 - Modulo di Young

Determinare per un filo di alluminio, di diametro $d = 4\text{mm}$ e lunghezza $l = 1,2\text{ m}$, l'allungamento per effetto di una trazione con carico $F = 120\text{ N}$, sapendo che il modulo di Young per l'alluminio vale $E = 7 \cdot 10^{10}\text{N/m}^2$

Sol.: Sezione del filo: $S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi(2 \cdot 10^{-3})^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$

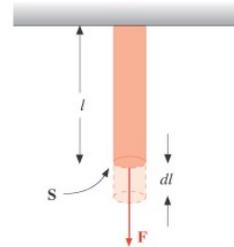
$$\sigma = \frac{F}{S} \Rightarrow \sigma = \frac{120}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 9,55 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{9,55 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^{10}} \cdot 1,2 = 0,16 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$\Delta l = 0,16\text{mm}$$

Quanto vale l'allungamento del filo se si dimezza il suo diametro?

Se diametro del filo è la metà allungamento è 4 volte



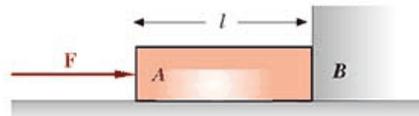
7

Esercizio 2 - Modulo di Young

Una sbarra, di sezione S e lunghezza L è posta su un piano orizzontale. Viene compressa con una forza costante F distribuita uniformemente su tutta S

Determinare ΔL quando la sbarra è vincolata in B al muro.

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow \Delta L = \frac{L}{E} \sigma$$



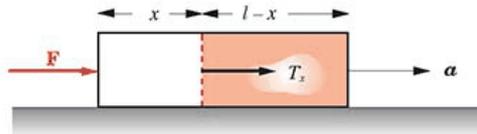
Poiché $\sigma = \frac{F}{S}$ si ottiene:

$$\Delta L = \frac{L F}{E S}$$

8

Esercizio 3 - Modulo di Young

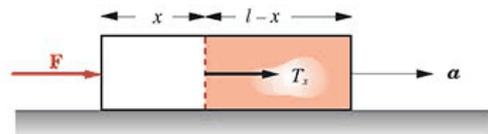
Nel problema precedente (una sbarra, di sezione S e lunghezza L posta su un piano orizzontale viene compressa con una forza costante F distribuita uniformemente su tutta S) determinare ΔL quando la sbarra non è più vincolata al muro



Si deve determinare la forza che agisce sulla superficie a distanza x dal punto di applicazione di F

9

Esercizio 3 - Modulo di Young



Il L. di Newton: $F = pLSa$ ($m = pLS$ p : densità) $a = F/pLS$ uguale per tutti i punti della sbarra

Nel punto x : $F_x = ps(L-x)a$ pertanto $F_x = ps(L-x) F/pLS = F(1-x/L)$

Sia dl_x la deformazione relativa ad un tratto di lunghezza dx . Si ha:

$$\frac{dl_x}{dx} = \frac{F_x}{ES} = \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \rightarrow \int dl_x = \frac{F}{ES} \int \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \rightarrow$$

$$\Delta L = \frac{F}{ES} \left(L - \frac{L^2}{2L}\right) = \frac{1}{2} \frac{FL}{ES}$$

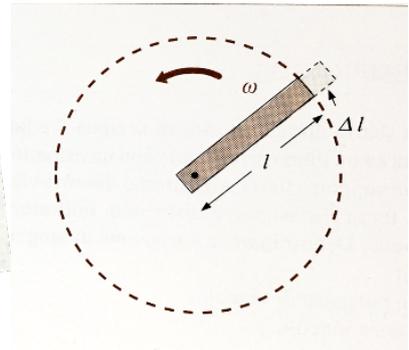
$$\Delta L = \frac{L}{2} \frac{F}{ES}$$

10

Esercizio 4 - Modulo di Young

L

Un'asta sottile, di sezione S , lunghezza l e massa m , ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale, perpendicolare all'asta stessa e passante per un suo estremo. Determinare la variazione di lunghezza Δl .



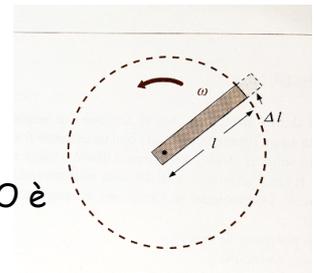
Come nell'esempio precedente:

Sulla sezione distante x dall'asse di rotazione agisce una forza F_x che risulta dalle forze agenti su tutti gli elementi dx che giacciono tra x ed L :

$$dm\omega^2 x = \rho S \omega^2 x dx \quad \rightarrow \quad F_x = \int_x^L \rho S \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 (L^2 - x^2)$$

11

Esercizio 4 - Modulo di Young



La variazione di lunghezza dt di un elemento dx distante x da O è

$$dt = \frac{F_x}{SE} dx = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{E} (L^2 - x^2) dx$$

Integrando sulla lunghezza della sbarra

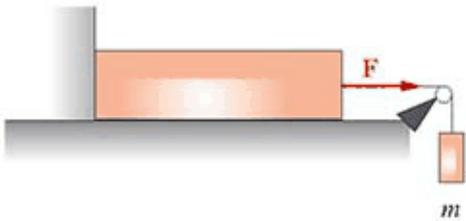
$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{E} \int_0^L (L^2 - x^2) dx \quad \rightarrow \quad \Delta L = \frac{1}{3} mL^2 \frac{\omega^2}{SE}$$

$$= 0,33 \times 0,4 \times 100 / 10^7 = 1,32 \cdot 10^{-6}$$

12

Trazione e compressione

Abbiamo visto che una barra solida omogenea se è bloccata ad un'estremità ed all'altra estremità viene applicata una forza di modulo F (di trazione o compressione) si ha una deformazione (variazione di lunghezza) e si raggiunge un equilibrio in cui la reazione elastica della sbarra eguaglia la forza applicata.



Secondo la legge di Hooke, carico specifico ($\sigma = F/S$) e allungamento unitario ($\frac{\Delta L}{L}$) per piccoli valori del carico sono proporzionali ed il loro rapporto è definito come il **modulo di Young** o modulo di elasticità E

$$E = \frac{F}{S} / \frac{\Delta L}{L}$$

13

Legge di Poisson

Per effetto della trazione la sbarra non solo si allunga, ma **subisce anche una variazione di sezione**.

Se R è una dimensione trasversale, ad esempio, il raggio di una sbarra cilindrica, si trova **la legge di Poisson**:

$$\frac{\Delta R}{R} = -\nu \frac{\Delta L}{L} = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

ν : Grandezza adimensionale, **coefficiente di Poisson**
Nella trazione il volume della sbarra non può diminuire.

14

Se consideriamo una sbarra cilindrica con altezza L e raggio di base R , il volume iniziale è $V_0 = \pi R^2 L$.

Dopo la trazione, il volume diventa V_f :

$$V_f = V_0 + \Delta V = \pi(R + \Delta R)^2(L + \Delta L) = \pi(R^2 + \Delta R^2 + 2R\Delta R)(L + \Delta L) \rightarrow$$

$$V_f = \pi[R^2L + R^2\Delta L + \cancel{\Delta R^2L} + \cancel{\Delta R^2\Delta L} + 2R\Delta RL + \cancel{2R\Delta R\Delta L}] \rightarrow$$

$$V_f = V_0 + \Delta V = (\pi R^2 L) + (\pi R^2 \Delta L + 2\pi R L \Delta R)$$

Dove $\pi R^2 \Delta L + 2\pi R L \Delta R = \Delta V$

Se supponiamo $\Delta V \geq 0$ avremo:

$$\cancel{\pi R^2 \Delta L} + \cancel{2\pi R L \Delta R} \geq 0 \rightarrow \frac{\Delta L}{L} \geq -2 \frac{\Delta R}{R}$$

15

Poiché $\frac{\Delta R}{R} = -\nu \frac{\Delta L}{L}$ si ha:

$$\frac{\Delta L}{L} \geq -2 \left(-\nu \frac{\Delta L}{L} \right) \rightarrow 1 \geq -2\nu \rightarrow \underline{\nu \leq 0.5}$$

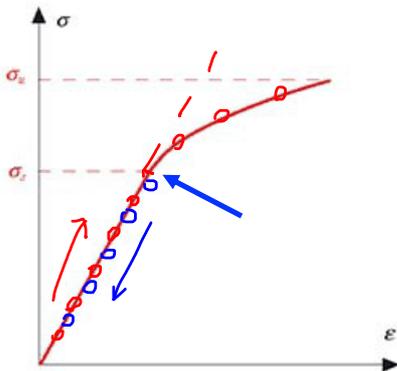
La condizione $\nu \leq 0,5$ è la condizione perché sia $\Delta V \geq 0$

Sperimentalmente si trova sempre $\nu \leq 0,5$, si conclude pertanto che il volume della sbarra sottoposta a trazione non diminuisce mai

$$\begin{aligned} \nu = 0.5 &\rightarrow V_f = V_0 \\ \nu < 0.5 &\rightarrow V_f > V_0 \end{aligned}$$

16

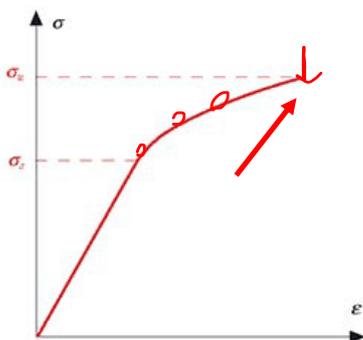
Il comportamento dei corpi appena analizzato è detto "comportamento elastico del materiale" e si manifesta se il valore di carico si mantiene al di sotto di un certo valore detto "critico" che dipende dal tipo di materiale. Quando il carico supera questo valore critico la deformazione diventa permanente (è chiamata deformazione plastica) e non è reversibile con la rimozione del carico.



Il carico specifico al di sopra del quale avviene la deformazione plastica è detto **carico specifico di snervamento σ_s** .
 $\sigma < \sigma_s$. Deformazione lineare elastica reversibile.
 $\sigma > \sigma_s$. Deformazione plastica non reversibile.
 La deformazione è notevole, anche per piccoli incrementi di carico.
 Per l'acciaio $\sigma_s = 30 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, per il piombo è dell'ordine di $1 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$.

17

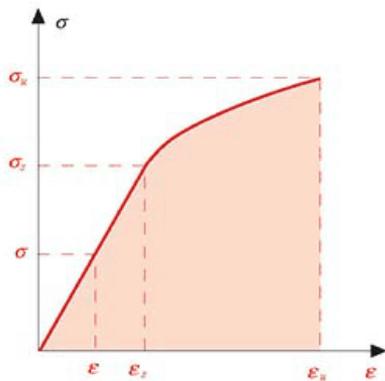
Aumentando ulteriormente il carico, il materiale arriva alla rottura. Il carico specifico a cui avviene la rottura è detto **carico unitario di rottura: σ_u** .



In trazione σ_u (in unità 10^7 N/m^2) per l'acciaio varia tra 50 e 200, scende a 10 per l'alluminio, varia tra 3 e 9 per il vetro ed è circa 1 per il piombo.
In compressione σ_u può essere diverso da quello in trazione, per esempio, per il vetro varia tra 60 e 120, per il piombo vale 5.
 Il prodotto tra il carico specifico e l'allungamento specifico ha le dimensioni di un'energia per unità di volume:

$$\epsilon \sigma = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

18



L'area sottesa alla curva carico -allungamento

$$\int \sigma d\varepsilon$$

assume il significato di energia assorbita dal materiale per unità di volume W_v .

Tale area è detta **modulo di tenacità**.

19

Un materiale ad elevata resistenza meccanica, in grado di sopportare elevati carichi, assorbe una considerevole quantità di energia prima di rompersi, è detto **TENACE**.

Un materiale nel quale la rottura ha luogo senza un'apprezzabile deformazione plastica, assorbe una minore energia, è detto **FRAGILE**

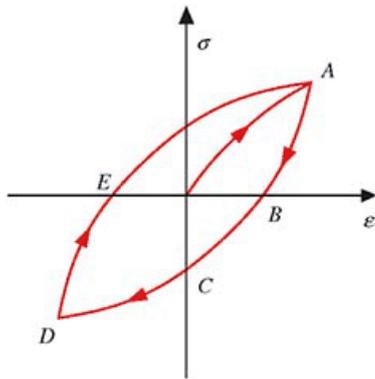
La duttilità di un materiale è indice della deformazione plastica prima della rottura, può essere espressa dall'allungamento specifico, intervenuto sotto carico.

Un materiale duttile è anche tenace in quanto è in grado di deformarsi in modo elastico prima della rottura

20

Isteresi elastica

Proprietà caratteristica dei corpi è l'isteresi elastica.



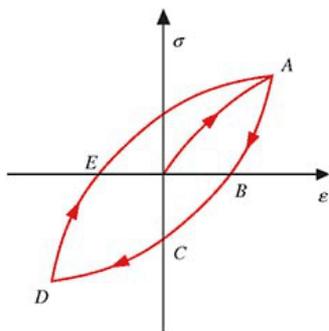
La figura rappresenta il legame tra σ ed ϵ di una barra sottoposta a trazione .

Si inizia dalla situazione di riposo $\sigma=0$ e $\epsilon=0$ per un materiale che non ha mai subito una deformazione plastica.

Aumentando il carico specifico, la deformazione ϵ aumenta linearmente fino a $\sigma=\sigma_s$, e poi più rapidamente.

Siamo al punto A

21



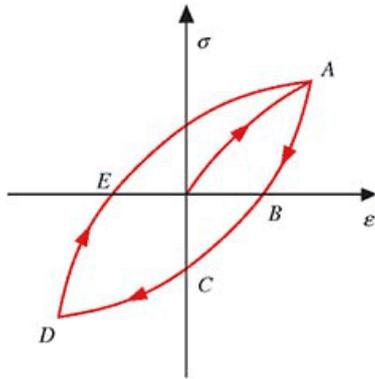
Quando siamo al punto A riduciamo la forza di trazione: non viene più ripercorsa la stessa curva $\sigma(\epsilon)$ ma la sbarra resta più deformata, e per $\sigma=0$, si ha $\epsilon < 0$.

Occorre poi comprimere la barra, ovvero applicare $\sigma < 0$ per ritrovare $\epsilon=0$...

Il ciclo ABCDE nel piano (σ, ϵ) si chiama ciclo di isteresi. Esso mostra che la relazione tra σ ed ϵ non è univoca (come è invece nel comportamento elastico) se il corpo ha subito carichi superiori a quello di deformazione elastica. Dipende infatti dalla deformazione subita dal corpo.

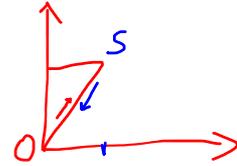
Ovviamente se $\sigma < \sigma_s$, il fenomeno dell'isteresi non si presenta. Il comportamento mostrato in figura giustifica i termini "deformazione reversibile" "deformazione irreversibile".

22



L'area del ciclo ABCDE

$$\oint \sigma d\varepsilon$$



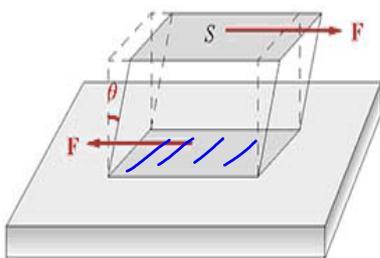
rappresenta l'energia, per unità di volume W_n , assorbita durante il processo di deformazione e fornita dalle forze di trazione e compressione.

Queste forze non sono conservative: il sistema torna nello stato iniziale ma il lavoro totale non è nullo (>0):

l'energia meccanica assorbita in un ciclo viene dissipata totalmente (trasformata in calore).

23

Scorrimento



Consideriamo un parallelepipedo solido incollato su due facce opposte a due lastre rigide, una bloccata ed una mobile parallelamente all'altra. Applicando una forza F come quella mostrata in figura, si osserva uno scorrimento della faccia superiore rispetto a quella inferiore, che si può misurare tramite l'angolo θ .

Si trova che tra il carico specifico e l'angolo θ esiste una relazione lineare.

$$\frac{F}{S} = \sigma = G\theta$$

24

Nella relazione

$$\sigma = G\theta$$

Il parametro G (modulo di rigidità o di taglio) esprime la proporzionalità tra il carico specifico e la deformazione e dipende dal materiale.

Anche in questo caso, finché il carico non supera un determinato valore critico, rimossa la sollecitazione, il corpo ritorna nello stato iniziale (il corpo reagisce elasticamente), se invece il carico supera il valore critico si entra nella situazione, analoga alla precedente, di regime anelastico.

Tra le costanti elastiche analizzate esiste la relazione:

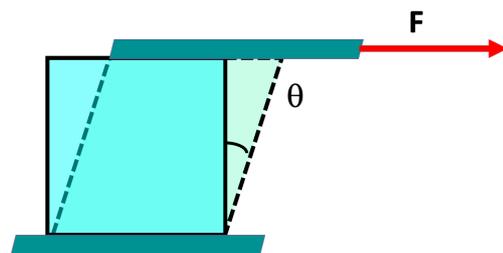
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Valida nel regime di deformazione elastica.

25

ESEMPIO

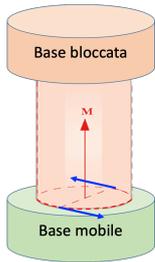
Un cubetto di ferro ($E=2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\nu=0.30$, $G=8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$) di lato $L=1 \text{ cm}$ è soggetto a scorrimento per effetto di un carico specifico σ , raggiungendo una situazione di equilibrio con $\theta=10^{-3} \text{ rad}$. Determinare il valore della forza di taglio applicata.



$$\sigma = G\theta = 8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{S} \rightarrow F = \sigma S = 8 \cdot 10^7 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

26



Torsione

Consideriamo una sbarra cilindrica di raggio R e lunghezza L , bloccata su una base e applichiamo all'altra base una coppia di forze con momento M , parallelo all'asse della sbarra che risulta così sottoposta a torsione.

Il valore di M e l'angolo di rotazione θ della base inferiore rispetto a quella superiore è dato dall'espressione:

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \theta = k\theta \quad \text{con } k = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L}$$

La reazione elastica della sbarra si manifesta con un momento $-M$, il cui modulo è proporzionale all'angolo di torsione

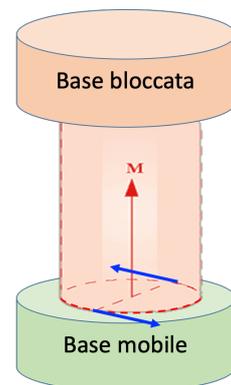
27

L'effetto di torsione dipende fortemente dalle dimensioni trasversali: con una sbarra molto sottile, ad esempio un filo, si ottiene una deviazione misurabile anche con l'applicazione di un momento molto piccolo

Per effettuare la torsione il momento esterno compie lavoro:

$$W = \int M(\theta) d\theta = \int k\theta d\theta = \frac{1}{2} k\theta^2$$

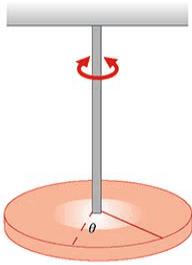
Il lavoro viene immagazzinato nel sistema come energia potenziale elastica



28

Pendolo di torsione

Un pendolo di torsione si realizza sospendendo un corpo solido ad un filo; generalmente il punto di aggancio coincide con il centro di massa.



Si consideri il pendolo di torsione in figura: se ruotiamo il disco di un angolo θ , mantenendolo orizzontale, il filo di sospensione subisce una torsione e sviluppa un momento elastico: $-k\theta$.

Se lasciamo il corpo, esso si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico, descrivendo un moto armonico governato dall'equazione:

$$M = I\alpha = -k\theta \quad \rightarrow \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$$

29

l'equazione: $M = I\alpha = -k\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$ ha soluzione

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

In questo caso non abbiamo posto la condizione delle "piccole oscillazioni", perché il filo, anche se sottoposto ad una torsione di un angolo grande, sviluppa sempre un momento proporzionale all'angolo.

L'unica limitazione è quella di essere nelle condizioni di regime elastico.

Il pendolo di torsione trova molte applicazioni

- Noto k permette di determinare il momento di inerzia
- Noto I permette di determinare k e quindi il modulo di rigidità di un materiale.

30

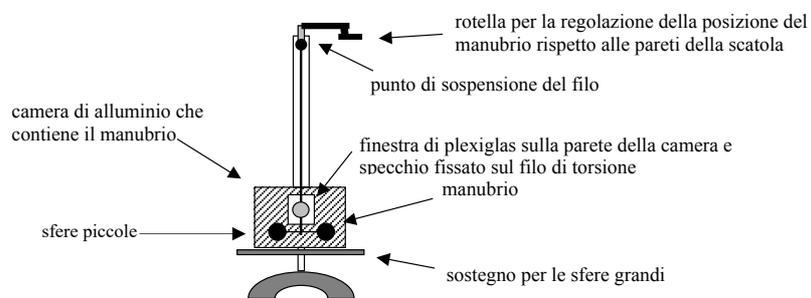
L'esperienza di Cavendish

<https://www.youtube.com/watch?v=1L3Y3THVNZA>

31

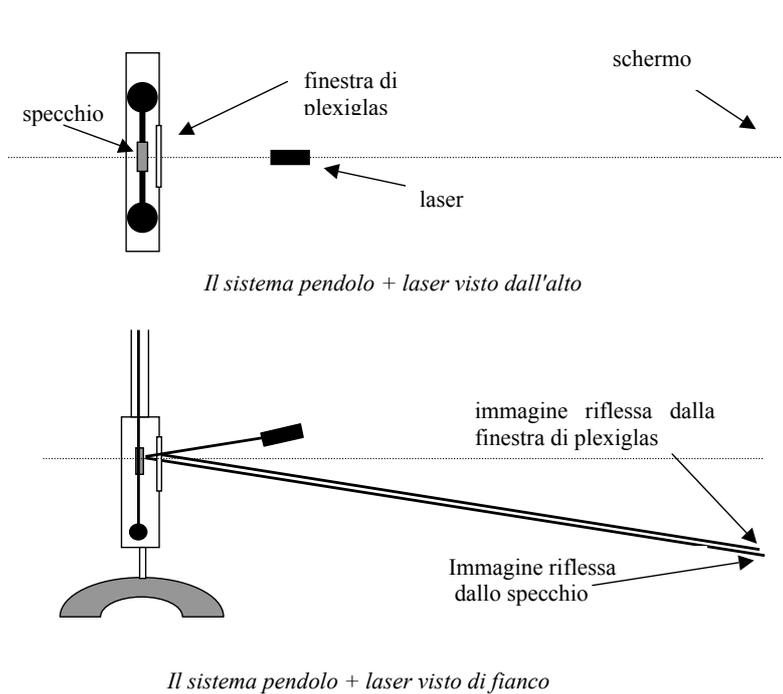
La bilancia di torsione costituisce uno strumento in grado di misurare forze molto piccole (fino a 10^{-9} N).

La bilancia di torsione è stata utilizzata da Cavendish per misurare la costante γ nella legge di gravitazione universale $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$.



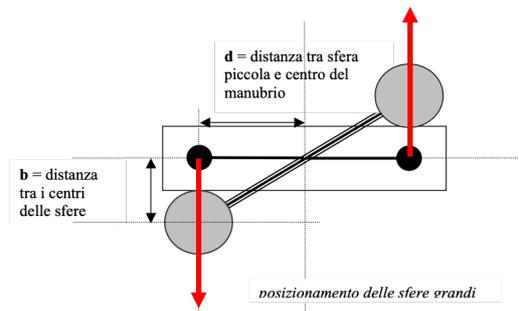
Il pendolo di torsione

32



33

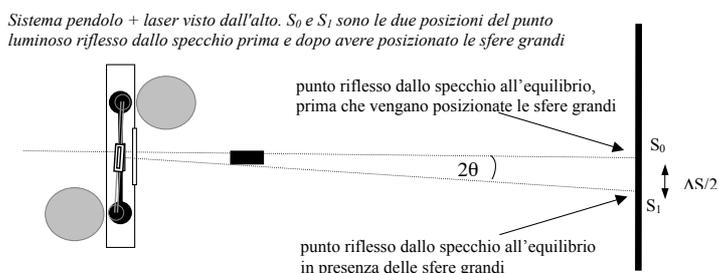
Le sfere grandi vengono poggiate sul sostegno e posizionate in modo che tocchino le pareti della camera. In tale posizione la distanza b tra i centri delle sfere grandi e quella delle sfere piccole è nota.



La forza di attrazione gravitazionale tra grandi e sfere piccole costituiscono una coppia che viene controbilanciata dalla forza elastica di torsione: il manubrio si mette a oscillare compiendo oscillazioni smorzate. Il manubrio raggiunge infine una posizione di equilibrio ruotata di un **angolo** θ rispetto alla posizione che esso assume in assenza di forze. In corrispondenza il raggio riflesso dallo specchietto forma un **angolo** 2θ rispetto la posizione che aveva in assenza delle sfere grandi.

34

Quando si è raggiunto l'**equilibrio** (quindi il pendolo ha smesso di oscillare lasciando il manubrio ruotato di un angolo θ rispetto alla posizione che aveva in assenza delle sfere grandi) lo **spostamento** $\Delta S/2$ della posizione del punto luminoso rispetto alla posizione che esso aveva prima di posizionare le sfere grandi è dato da $\Delta S/2 = (S_0 - S_1)$, come indicato in figura.



Da questo si ricava il valore dell'angolo θ di cui il manubrio è ruotato:

$$2\theta \approx \text{tg}2\theta = \frac{\Delta S}{2L}$$

dove L = distanza specchio - schermo.

35

In presenza delle sfere grandi, il manubrio raggiunge la posizione di equilibrio quando la coppia dovuta all'attrazione gravitazionale è uguale e contraria alla coppia dovuta alla forza elastica di torsione del filo. Consideriamo in prima approssimazione solo la forza di attrazione gravitazionale tra ciascuna sfera piccola e la sfera grande ad essa più vicina. Si ha:

$$\tau_F = \tau_t \quad \rightarrow \quad 2Fd = k\theta \quad \rightarrow \quad 2 \frac{\gamma m M}{b^2} d = k\theta \approx k \frac{\Delta S}{4L} \quad \rightarrow$$

$$\text{Avendo ricavato } 2\theta \approx \text{tg}2\theta = \frac{\Delta S}{2L} \quad \rightarrow \quad \theta \approx \frac{\Delta S}{4L}$$

Pertanto:

$$\gamma \approx k \frac{\Delta S b^2}{8LmMd}$$

36



<https://www.youtube.com/watch?v=vj0fNxhyh-Y>

37

Pressione - Compressione uniforme

Precedentemente abbiamo sempre considerato forze applicate a punti. Stiamo cominciando a pensare a forze che agiscono su superfici:

La forza diviso la superficie su cui agisce ($P = \frac{F}{S}$) definisce la pressione.

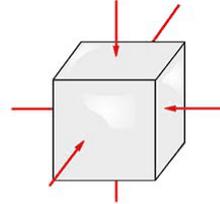
In realtà, come vedremo in seguito, la pressione è definita come la componente della forza normale alla superficie diviso per la superficie:

$$P = \frac{F_{\perp}}{S}$$

38

Stiamo ora trattando le proprietà dei corpi solidi e siamo interessati alla pressione come modalità di deformazione di un corpo. Supponiamo quindi di applicare al corpo una pressione costante. Come?

Per esempio immergendo un corpo (per esempio un cubo) in un fluido



Indicato con V il volume del corpo alla pressione P , una variazione di pressione ΔP determina una variazione di volume ΔV data da:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-1}{\beta} \Delta P$$

Dove β è il modulo di compressibilità isoterma. Vuol dire che in condizioni di temperatura costante la diminuzione relativa di volume è proporzionale all'aumento di pressione.

39

Tra β e le altre costanti elastiche sussiste la relazione:

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Osserviamo che **solo 2 costanti elastiche sono indipendenti**. Con esperimenti di trazione e di torsione si possono determinare E e G per un dato materiale e poi calcolare β e ν attraverso le relazioni viste

Materiale	Modulo di Young E (N/m ²)	Coefficiente di Poisson ν	Modulo di rigidità G (N/m ² rad)	Modulo di compressibilità β (N/m ³)
Acciaio	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.30	$8.5 \cdot 10^{10}$	$1.6 \cdot 10^{11}$
Alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$	0.33	$2.5 \cdot 10^{10}$	$7.0 \cdot 10^{10}$
Ferro	$2.0 \cdot 10^{11}$	0.50	$8.0 \cdot 10^{10}$	$1.7 \cdot 10^{11}$
Ottone	$9.1 \cdot 10^{10}$	0.35	$3.0 \cdot 10^{10}$	$6.1 \cdot 10^{10}$
Piombo	$1.4 \cdot 10^{10}$	0.40	$5.0 \cdot 10^9$	
Rame	$1.1 \cdot 10^{11}$	0.34	$4.0 \cdot 10^{10}$	$1.4 \cdot 10^{11}$
Vetro	$7.0 \cdot 10^{10}$	0.25	$2.5 - 3.2 \cdot 10^{10}$	$5.0 - 5.5 \cdot 10^{16}$

40

Una barra di acciaio di lunghezza 150 mm e sezione quadrata (di lato 20 mm), sottoposta ad un carico di trazione pari a 90 kN , subisce un allungamento elastico pari a $0,1 \text{ mm}$.

Calcolare il modulo elastico E (modulo di Young).

Lunghezza iniziale: $L_0 = 150 \text{ mm} = 0,15 \text{ m}$
 Allungamento elastico: $\Delta L = 0,1 \text{ mm} = 0,1 \times 10^{-3} \text{ m}$
 Area della sezione: $S = 20 \times 20 = 400 \text{ mm}^2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

Per calcolare il modulo di Young usiamo la legge di Hooke:

$$\sigma = \varepsilon E$$

(dove E è il modulo di Young ed ε la deformazione), da cui

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \left[\text{MPa} = \text{M} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0,1 \times 10^{-3}}{0,15} = 0,67 \times 10^{-3}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{90}{400 \times 10^{-6}} = 0,225 \times 10^6 \text{ KN/m}^2 = 225 \text{ MPa}$$

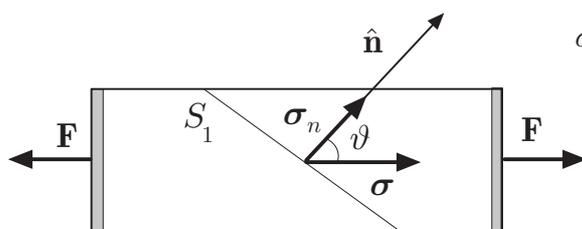
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{225}{0,67 \times 10^{-3}} = 335,82 \times 10^3 \text{ MPa} \cong 336 \text{ GPa}$$

41

Problemi di riepilogo:

Una sbarra omogenea di sezione S , è sottoposta a trazione mediante due forze F opposte, applicate lungo l'asse, ai suoi estremi. Determinare l'orientazione della sezione in cui lo sforzo di taglio ha il valore massimo e calcolare il corrispondente sforzo normale.

Si immagini di sezionare la sbarra con un piano la cui normale forma l'angolo θ con l'asse. Detta S_1 la sezione praticata, si ha



$$\sigma_n = \frac{\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{S_1} = \frac{F \cos \theta}{S_1}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta}{S_1}.$$

42

$$\sigma_n = \frac{\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{S_1} = \frac{F \cos \theta}{S_1}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta}{S_1}.$$

Poiché $S = S_1 \cos \theta$, possiamo scrivere:

$$\sigma_n = \frac{F \cos^2 \theta}{S}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta \cos \theta}{S},$$

Il massimo di σ_t , al variare di θ , si ha per

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 0, \quad \frac{F}{S}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{F}{S} \cos 2\theta = 0;$$

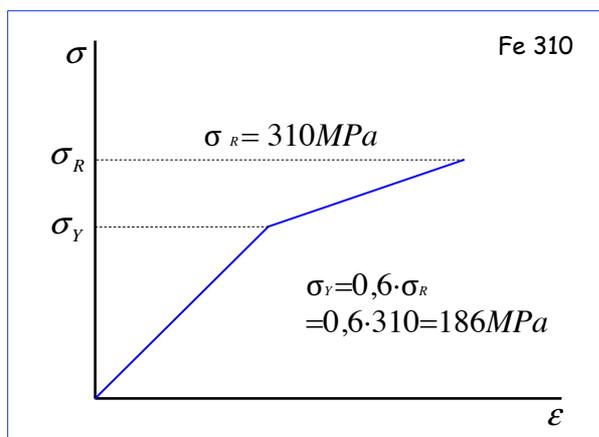
cioè per $\theta = \pi/4$. I valori degli sforzi sono:

$$\sigma_n(\pi/4) = \sigma_t(\pi/4) = \frac{F}{2S}.$$

Lo sforzo di taglio è uguale, in modulo, allo sforzo normale.

43

Una cabina pesa 500 Kg e supporta un carico massimo di 350 Kg. Supponendo di utilizzare una fune di acciaio Fe 310 e applicando un coefficiente di sicurezza pari a 2, dimensionare la sezione S della fune.



$$P_t = 500 + 350 = 850 \text{ Kg}$$

$$\alpha = 2$$

$$F = P_t \times \alpha \times g = 850 \times 2 \times 9,8 = 16660 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} < \sigma_Y$$

$$S > \frac{F}{\sigma_Y} = \frac{16660 \text{ N}}{186 \times 10^6 \text{ Pa}} = 0,89 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,89 \text{ cm}^2$$

Sezione circolare

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 > 0,89 \text{ cm}^2 \Rightarrow d > \sqrt{\frac{4 \times 0,89}{\pi}} = 1,065 \text{ cm}$$

44