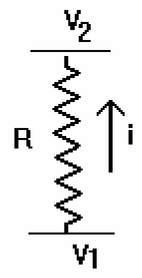
CAPITOLO 4

MECCANISMI COMBINATI: RESISTENZA TERMICA E TRASMITTANZA

4.1. Resistenze termiche

Quando nei processi di trasmissione del calore sono contemporaneamente implicati più meccanismi di scambio (ad esempio, conduzione, convezione e irraggiamento) risulta conveniente utilizzare il concetto di **resistenza termica**. In particolare è possibile descrivere il trasporto del calore a regime stazionario facendo uso di relazioni matematiche analoghe a quelle che si utilizzano in elettrotecnica .



Come noto, nel caso che una corrente elettrica continua fluisca attraverso un conduttore, la **relazione di Ohm** fornisce:

$$\mathbf{i = -\Delta V / R_e} \qquad \mathbf{V_2 < V_1}$$

ove **i** rappresenta l'intensità di corrente [Ampere], $\mathbf{\Delta V}$ la differenza di potenziale elettrico tra due punti del conduttore [Volt], causa che provoca il movimento delle cariche elettriche ed $\mathbf{R_e}$ la corrispondente resistenza elettrica [Ohm].

Nella trasmissione del calore vi sono grandezze analoghe; ad esempio si può far corrispondere all'intensità di corrente **i** il flusso termico φ [W], alla differenza di potenziale elettrico $\mathbf{\Delta V = V_2 - V_1}$ la differenza di temperatura $\mathbf{\Delta t}$ [°C] e alla resistenza elettrica $\mathbf{R_e}$ una resistenza termica **R** con le dimensioni [K/W] (per semplicità di notazione si userà lo stesso simbolo).

Si può, quindi, scrivere:

$$\varphi = -\Delta t / R \qquad [W]$$

o, in termini di flusso specifico **φ'** [W/m^2], anche:

$$\varphi' = -\Delta t / R' \qquad [W/m^2]$$

ove con **R'** [(m^{2}K)/W] è indicata la resistenza termica per unità di area o resistenza termica specifica.

Sulla base di quanto già richiamato sui tre meccanismi di scambio termico, è immediato riscrivere le relazioni già ottenute nella forma:

$$\varphi = -\Delta t / R \quad \text{o} \quad \varphi' = -\Delta t / R'.$$

Ad esempio, nel caso di **conduzione stazionaria** attraverso uno strato piano ove con $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ rappresentino le temperature delle due facce opposte, risulta:

$$\varphi = -\lambda A \frac{t_2 - t_1}{L} = -\frac{\Delta t}{R} \qquad \text{ove} \quad \mathbf{R = L / \lambda A}$$

$$\varphi' = -\lambda \frac{t_2 - t_1}{L} = -\frac{\Delta t}{R'} \qquad \text{ove} \quad \mathbf{R' = L / \lambda}$$

Anche le relazioni già ottenute per la **convezione termica** e per l'**irraggiamento** possono essere scritte in termini d'opportune resistenze termiche.

Nel primo caso (**convezione** tra la superficie **A** di un corpo solido a temperatura $\mathbf{t_1}$ ed un fluido a temperatura $\mathbf{t_2}$) si può, infatti, ancora scrivere:

$$\varphi = \alpha_c A (t_1 - t_2) = -\alpha_c A (t_2 - t_1) = -\Delta t / R \qquad \text{ove} \quad \mathbf{R = 1 / \alpha_c A}$$

$$\varphi' = \alpha_c (t_1 - t_2) = -\alpha_c (t_2 - t_1) = -\Delta t / R' \qquad \text{ove} \quad \mathbf{R' = 1 / \alpha_c}$$

Nel secondo (**irraggiamento** tra un corpo (superficie **A**) ed un secondo corpo con temperature della loro superficie rispettivamente a $\mathbf{t_1}$ e a $\mathbf{t_2}$) si può scrivere:

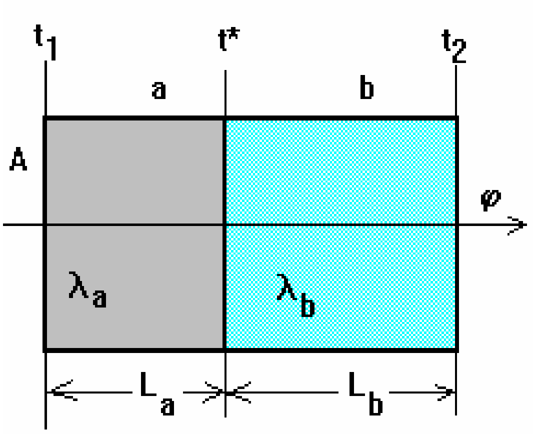
$$\varphi = \alpha_{irr} A (t_1 - t_2) = -\Delta t / R \qquad \text{ove} \quad \mathbf{R = 1 / \alpha_{irr} A}$$

$$\varphi' = \alpha_{irr} (t_1 - t_2) = -\Delta t / R' \qquad \text{ove} \quad \mathbf{R' = 1 / \alpha_{irr}}$$

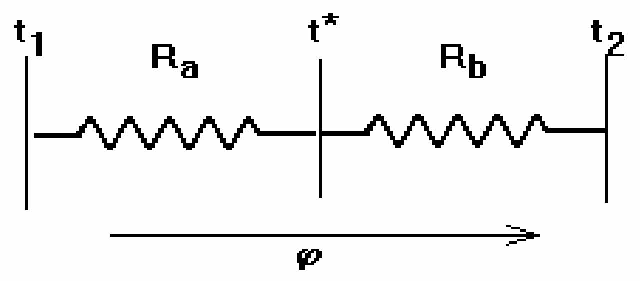
L'introduzione del concetto di resistenza termica consente di studiare, in modo particolarmente semplice, numerosi problemi termici ove risultino contemporaneamente operanti più meccanismi. Ad esempio, come si vedrà con maggiore dettaglio in seguito, la trasmissione del calore a regime stazionario attraverso la parete di un edificio si attua attraverso i tre meccanismi conduzione, convezione e irraggiamento, e quindi può vantaggiosamente essere schematizzata mediante un'opportuna combinazione di singole resistenze termiche. Come si ricorderà singole resistenze possono combinarsi secondo due distinte modalità e cioè in **serie** od in **parallelo**.

4.1.1. Resistenze termiche - Disposizione in serie

Una disposizione di resistenze termiche è detta **in serie**, se esse sono successivamente attraversate dal flusso termico φ.



Si consideri, ad esempio, il caso di una parete piana (superficie **A**) composta da due strati **a** e **b**. Le temperature sulle facce interna ed esterna sono rispettivamente $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$.mentre **t*** **è** la temperatura al confine dei due strati. In termini di resistenze termiche la situazione è rappresentata nella seguente figura.



Indicando con $\mathbf{R_a}$ e $\mathbf{R_b}$:

$$\mathbf{R_a = L_a / \lambda_a A} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{R_b = L_b / \lambda_b A}$$

per ciascuno strato si può scrivere :

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{(t_1 - t^*) / R_a} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{(t^* - t_2) / R_b}$$

Osservando che:

$$\mathbf{(t_1 - t^*) + (t^* - t_2) = (t_1 - t_2)}$$

può anche scriversi:

$$\boldsymbol{\varphi} \mathbf{R_a} + \boldsymbol{\varphi} \mathbf{R_b} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{R_t} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R_a + R_b = R_t}$$

ove con $\mathbf{R_t}$ si è indicata la **resistenza totale** equivalente alla somma delle due resistenze in serie. Il flusso termico che attraversa i due strati può essere espresso:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{(t_1 - t_2) / R_t}$$

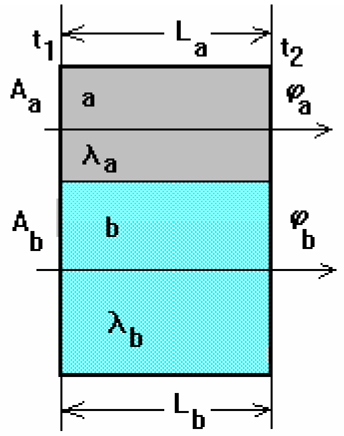
In termini di resistenze specifiche, risulta:

$$\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{(t_1 - t_2) / R'_t}$$

Generalizzando quanto sopra per il caso di più resistenze termiche in serie, si può scrivere:

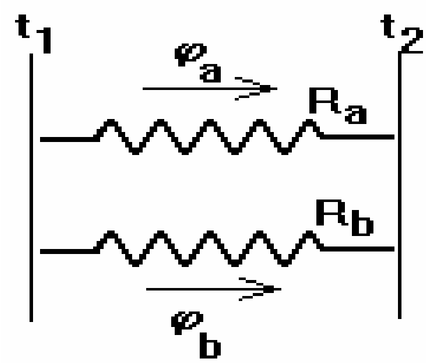
$$\mathbf{R_t = \Sigma_i R_i} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{R'_t = \Sigma_i R'_i}$$

4.1.2. Resistenze termiche - Disposizione in parallelo



Una disposizione di resistenze termiche è **in parallelo** se agli estremi delle stesse opera la stessa differenza di temperatura.

Si consideri, ad esempio, il caso di una struttura piana con due strati **a** e **b** disposti come in figura. Le temperature relative alla faccia interna ed esterna della struttura siano $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$. In termini di resistenze termiche la situazione può essere rappresentata nella seguente figura.



Ciascuno strato ($\mathbf{A_a}$ e $\mathbf{A_b}$), avendo agli estremi la stessa differenza di temperatura, comporta:

$$\varphi_a = (t_1 - t_2) / R_a \qquad e \qquad \varphi_b = (t_1 - t_2) / R_b$$

ove: $$R_a = L_a / \lambda_a A_a \qquad e \qquad R_b = L_b / \lambda_b A_b$$

In questo caso sarà anche : $\mathbf{L_a = L_b}$

Analogamente a prima, si esprime il flusso termico in funzione della differenza di temperatura ($\mathbf{t_1}$ -$\mathbf{t_2}$) e della resistenza totale equivalente $\mathbf{R_t}$ rappresentativa delle due resistenze in parallelo:

$$\varphi = (t_1 - t_2) / R_t$$

Ma:

$$\varphi_a + \varphi_b = \varphi$$

per cui:

$$[(t_1 - t_2) / R_a] + [(t_1 - t_2) / R_b] = (t_1 - t_2) / R_t$$

da cui:

$$(1 / R_a) + (1 / R_b) = 1 / R_t$$

Generalizzando quanto descritto a più resistenze termiche in parallelo, si può scrivere:

$$1 / R_t = \Sigma_i (1 / R_i)$$

Nei casi con $\mathbf{A_a}$ e $\mathbf{A_b}$ diverse tra loro, è opportuno non riferirsi a resistenze termiche specifiche. In altri casi, quando gli elementi in parallelo sono caratterizzati dalla stessa area **A**, conviene fare riferimento alle resistenze termiche specifiche per le quali si riottiene:

$$1 / R'_t = \Sigma_i (1 / R'_i)$$

È opportuno precisare che quanto detto a proposito della disposizione in parallelo risulta corretto, a rigori, solo se le resistenze stesse non sono molto diverse tra loro: solo in questi casi, infatti, il flusso termico può essere considerato, con buona approssimazione, unidimensionale.

4.2 Trasmittanza termica di una struttura

Lo studio del processo di trasmissione del calore attraverso le strutture edilizie presenta rilevante interesse tecnico in quanto base per un corretto dimensionamento degli impianti di climatizzazione.

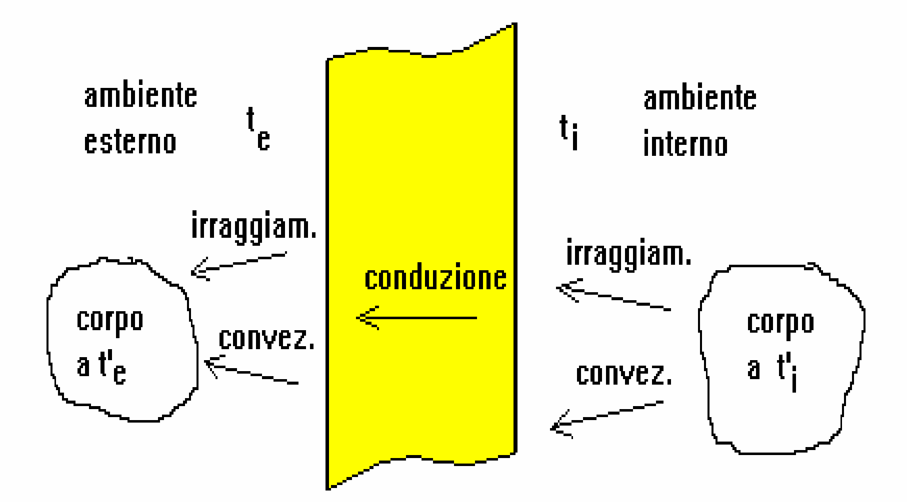
In linea generale, come già accennato, la trasmissione del calore attraverso le strutture delimitanti l'ambiente confinato si attua mediante un complesso insieme di fenomeni di **conduzione**, **convezione** ed **irraggiamento**.

Nella schematizzazione del problema rappresentata in figura una parete piana divide un ambiente interno a temperatura $\mathbf{t_a}$ dall'esterno a temperatura $\mathbf{t_e}$ ($\mathbf{t_a > t_e}$). Le temperature $\mathbf{t_{pi}}$ e $\mathbf{t_{pe}}$ sono rispettivamente le temperature della faccia interna ed esterna della parete.

In tali ipotesi si verifica:

- uno scambio termico per convezione tra l'aria e la parete sia sul lato interno ($\mathbf{t_i > t_{pi}}$) che sul lato esterno ($\mathbf{t_{pe} > t_e}$);
- uno scambio termico per irraggiamento tra le superfici dei corpi presenti nei due ambienti (interno ed esterno) e le rispettive superfici interna ed esterna della parete.

Si ipotizza per semplificare la situazione che sia all'interno che all'esterno siano presenti solo corpi con temperatura rispettivamente $\mathbf{t'_i}$ e $\mathbf{t'_e}$.



In condizioni di regime stazionario, tutte le temperature citate sono costanti nel tempo e l'intero processo può essere descritto mediante un'opportuna combinazione di resistenze in parallelo ed in serie.

- **Trasmissione del calore per convezione e irraggiamento sul lato interno ed esterno.**

Si suppone che la temperatura superficiale dei corpi presenti in entrambi gli ambienti (interno ed esterno) sia prossima alla temperatura dell’aria esterna ed interna. In riferimento allo schema rappresentato in figura ciò significa ipotizzare $\mathbf{t'_i = t_i}$ e $\mathbf{t_e = t'_e}$. In questa ipotesi semplificativa i flussi termici scambiati per convezione termica φ_c ed irraggiamento φ_{irr} sulla faccia interna ed esterna della parete sono determinati dalla **stessa differenza di temperatura**. La superficie **A** interessata ai flussi termici è la stessa e pertanto il problema può essere ricondotto al caso di due resistenze termiche specifiche poste in parallelo (convezione $\mathbf{R'_c = 1/\alpha_c}$ e irraggiamento $\mathbf{R'_{irr} = 1/\alpha_{irr}}$).

Si ha, quindi:

$$\varphi' = \varphi'_c + \varphi'_{irr} = (t_i - t_{pi}) / R'_c + (t_i - t_{pi})\ R'_{irr} = (t_i - t_{pi}) / R'$$

La resistenza termica equivalente può essere posta nella forma

$$R' = 1 / \alpha$$

ove il coefficiente di scambio α è detto **coefficiente liminare**. Risulta:

$$\alpha = (\alpha_c + \alpha_{irr})$$

Per riferire il coefficiente alla faccia interna o esterna della parete si può usare un pedice **i** ed **e**. Ad esempio, sul lato interno ed esterno:

$$\mathbf{R'_i = 1 / \alpha_i \text{ ;e } R'_e = 1 / \alpha_e} .$$

I coefficienti α_i e α_e vengono detti **coefficienti liminari** rispettivamente interno ed esterno e le corrispondenti $\mathbf{R'_i}$ e $\mathbf{R'_e}$ **resistenze liminari**.

Nelle situazioni di interesse nella fisica degli edifici si utilizzano coefficienti liminari costanti tenuto conto anche del limitato intervallo di temperature in gioco. A titolo di esempio, si riportano valori da assumersi per alcune comuni situazioni:

Per superfici rivolte verso l'interno:

α_i **= 9,3 W/m²K** per sup. orizzontali con flusso di calore ascendente (soffitti);

α_i **= 8,1 W/m²K** per sup. verticali (pareti verticali);

α_i **= 5,8 W/m²K** per sup. orizzontali con flusso di calore discendente (pavimenti).

Per superfici rivolte verso l'esterno (vento **w** fino a 4 m/s):

α_e **= 23,3 W/m²K** per sup. orizzontali e verticali con flusso di calore ascendente;

α_e **= 16,3 W/m²K** per sup. orizzontali con flusso di calore discendente (pavimenti).

Per superfici rivolte verso l'esterno (vento **w** > 4 m/s):

$\alpha_e = \mathbf{2{,}3 + 10{,}5 \cdot w^{0,5}}$ per sup. orizzontali e verticali con flusso di calore ascendente;

$\alpha_e = \mathbf{0{,}7 \cdot (2{,}33 + 10{,}5\ w^{0,5})}$ per sup. orizzontali con flusso di calore discendente.

Conduzione termica attraverso gli strati

Per quanto riguarda la conduzione termica attraverso pareti multistrato, è sufficiente osservare che gli strati possono essere considerati come altrettante resistenze termiche in serie alle resistenze termiche liminari.

In definitiva, nel caso di una parete composta da **n** strati piani ed omogenei di conducibilità generica λ_n e di spessore $\mathbf{L_n}$, la complessiva resistenza termica è:

$$\sum_n L_n / \lambda_n \qquad [m^2K/W]$$

Determinazione della trasmittanza termica di una struttura a strati omogenei

Il flusso termico specifico potrà essere espresso in funzione della differenza di temperatura tra interno ed esterno nella forma:

$$\varphi' = (t_i - t_e) / R'_t \qquad [W/m^2]$$

ove $\mathbf{R'_t}$ [m^2K/W] rappresenta la totale resistenza termica per unità di area della parete. Trattandosi di resistenze in serie:

$$R'_t = 1/\alpha_i + \sum_n L_n / \lambda_n + 1/\alpha_e \qquad [m^2K/W]$$

L'inverso della resistenza termica specifica $\mathbf{R'_t}$ è detta **trasmittanza termica** della parete **K**:

$$K = 1 / R'_t \qquad [W/m^2K]$$

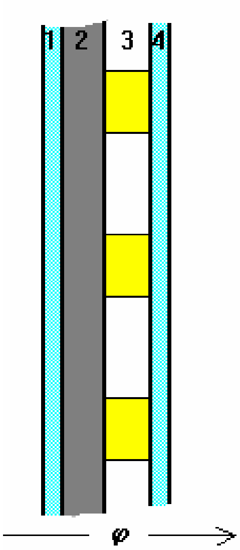
Il flusso termico specifico attraverso la parete può essere quindi espresso nel modo seguente:

$$\varphi' = (t_i - t_e) / R'_t = K \cdot (t_i - t_e) \qquad [W/m^2]$$

e globalmente per la superficie di area A risulta :

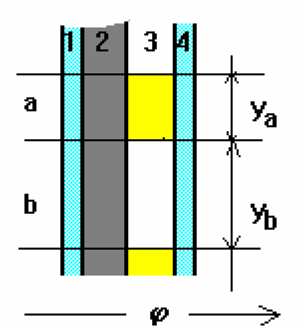
$$\varphi = K \cdot A\ (t_i - t_e) \qquad [W]$$

4.3 Strutture composte



Nel caso di pareti che presentino una struttura più complessa, ad esempio del tipo rappresentato in figura, la trasmittanza termica totale della parete potrà essere sempre ottenuta combinando opportunamente le diverse resistenze termiche in gioco.

In riferimento alla sezione, si può osservare che gli strati **1**, **2**, **4** (omogenei in tutta l'estensione della struttura) corrispondono a resistenze in serie, mentre lo strato **3** corrisponde a due resistenze in parallelo tra loro.



Per determinare la trasmittanza di una struttura così composta si considera, come schematizzato in figura, la più piccola porzione di essa che descriva compiutamente la parete e cioè, le parti **a** e **b** (lunghezza y_a e y_b). Attraversando ciascuna porzione si incontrano ora solo strati omogenei.

Se **z** rappresenta la coordinata normale alla sezione:

$$\mathbf{A_t = A_a + A_b = (y_a + y_b)\, z = y_a \cdot z + y_b\, z.}$$

Il flusso termico φ che attraversa l'elemento di superficie complessiva $\mathbf{A_t = A_a + A_b}$ è pari alla somma dei due contributi $\varphi_{\mathbf{a}}$ e $\varphi_{\mathbf{b}}$ trasmessi (in parallelo) attraverso le due porzioni **a** e **b**. Risulta:

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b$$

e ricordando le espressioni:

$$\varphi = -\frac{\Delta \mathbf{t}}{\mathbf{R_t}}; \varphi_a = -\frac{\Delta \mathbf{t}}{\mathbf{R_a}}; \varphi_b = -\frac{\Delta \mathbf{t}}{\mathbf{R_b}}$$

$$\frac{\mathbf{t_i - t_e}}{\mathbf{R_t}} = \frac{\mathbf{t_i - t_e}}{\mathbf{R_a}} + \frac{\mathbf{t_i - t_e}}{\mathbf{R_b}}$$

$$\mathbf{R_t} = \frac{\mathbf{R'_t}}{\mathbf{A_t}}; \; \mathbf{R_a} = \frac{\mathbf{R'_a}}{\mathbf{A_a}}; \; \mathbf{R_b} = \frac{\mathbf{R'_b}}{\mathbf{A_b}}$$

$$\varphi = \mathbf{A_t} \cdot \frac{\mathbf{t_i - t_e}}{\mathbf{R'}} = \mathbf{A_a} \cdot \frac{\mathbf{t_i - t_e}}{\mathbf{R'_a}} + \mathbf{A_b} \cdot \frac{\mathbf{t_i - t_e}}{\mathbf{R'_b}}$$

$$\varphi = \mathbf{A_t \overline{K} \cdot (t_i - t_e) = A_a \cdot K_a \cdot (t_i - t_e) + A_b \cdot K_a \cdot (t_i - t_e)}$$

ove :

$$\mathbf{\overline{K}} = \frac{\mathbf{K_a A_a + K_b A_b}}{\mathbf{A_t}} = \mathbf{K_a} \cdot \frac{\mathbf{A_a}}{\mathbf{A_t}} + \mathbf{K_b} \cdot \frac{\mathbf{A_b}}{\mathbf{A_t}}$$

Il valore della **trasmittanza media** $\mathbf{\overline{K}}$ della struttura è pari alla media pesata delle trasmittanze $\mathbf{K_a}$ e $\mathbf{K_b}$ delle porzioni di parete **a** e **b**

4.4. Strutture composte da materiali non omogenei

Se alcuni materiali componenti una parete multistrato non sono omogenei (ad esempio una fodera in mattoni forati) non è formalmente corretto parlare di conducibilità termica. In questi casi il flusso termico trasmesso non è dovuto unicamente ad un processo di conduzione, ma alla sua sovrapposizione con processi di convezione ed irraggiamento nelle cavità interne del manufatto. In questi casi è consuetudine riferirsi alla **conduttanza C** dello strato. La conduttanza **C** è definita come l'inverso della resistenza termica specifica **R'** che complessivamente caratterizza il manufatto.

$$\mathbf{C = 1 / R'} \qquad [W/m^2K]$$

Si noti che è sempre possibile, noto lo spessore **L** del manufatto, risalire dalla sua conduttanza **C** ad un opportuno valore della conducibilità, detta anche **conducibilità termica equivalente** λ_{eq}, sulla base della relazione:

$$\mathbf{R' = 1 / C = L / \lambda_{eq}}$$

Si precisa però che il valore di conducibilità termica ottenuto, se può essere utilizzato per lo specifico manufatto, **non può** essere utilizzato per estrapolare la resistenza termica di un manufatto simile ma di spessore diverso.

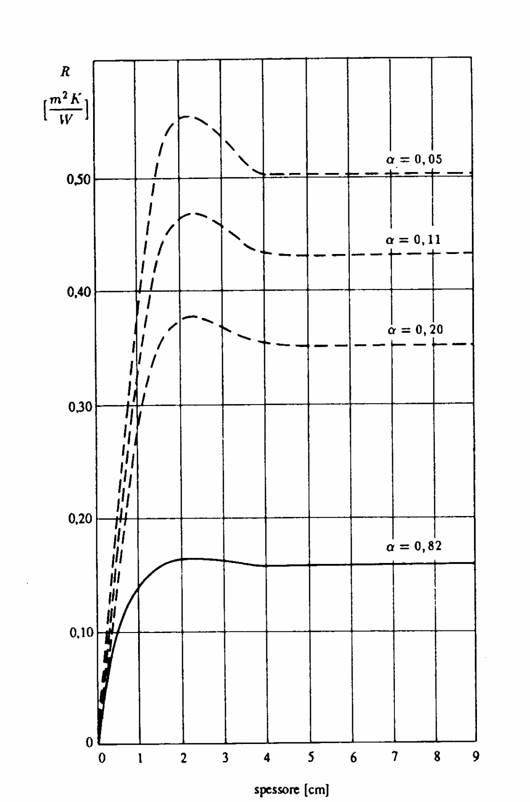
- **Intercapedini d'aria**

Il processo di trasmissione del calore attraverso le intercapedini, si attua per irraggiamento tra le opposte superfici dell'intercapedine e per convezione termica. Si ricorda che mentre lo scambio per irraggiamento **non risente** dell'orientazione dell'intercapedine ma solo dall'emissività delle due superfici affacciate, lo scambio termico per convezione è invece **fortemente condizionato dall'orientamento** delle superfici.

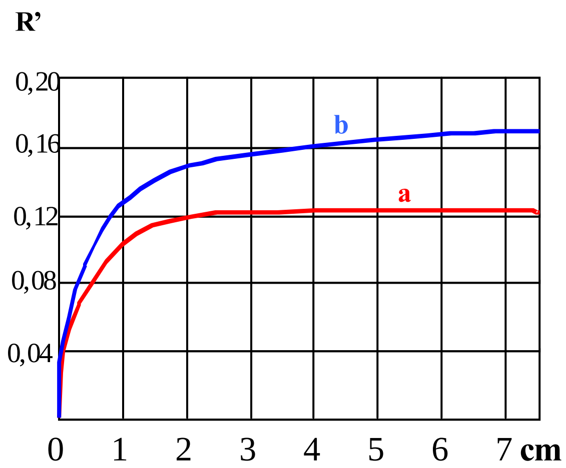
Ad esempio nelle intercapedini orizzontali, quando il flusso termico risulti diretto verso il basso, la convezione viene ad essere ostacolata da fenomeni di stratificazione dell'aria, per cui il contributo dell'irraggiamento può essere predominante. Nelle intercapedini verticali, invece, può risultare particolarmente significativo il contributo dovuto ai moti convettivi.

In genere, nella tecnica, si tiene conto delle intercapedini d'aria in termini delle loro conduttanze o resistenze termiche specifiche, che assumono valori fortemente dipendenti dallo spessore e dall'orientazione dello strato di aria, dalla differenza di temperatura e dalle emissività delle superfici affacciate.

La figura seguente (a sinistra) riporta la variazione della resistenza termica **R'** d'intercapedini verticali, in funzione dello spessore per diversi valori del fattore di assorbimento medio $\varepsilon = \alpha$ delle superfici. Come si può osservare, al di sopra di uno spessore assai limitato (circa 2-4 cm) la resistenza termica specifica non dipende più dallo spessore dell'intercapedine. La figura a destra mostra l'andamento della resistenza termica **R'** nel caso di un'intercapedine orizzontale con $\varepsilon = \alpha =$ **0.82** per flusso termico ascendente e discendente. Come si può osservare, anche in questo caso, esiste uno spessore oltre il quale la resistenza termica risulta indipendente dallo stesso.



Intercapedini verticali: R' per diversi fattori di emissività delle superfici affacciate ($\alpha = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$)



Intercapedini orizzontali: flusso termico dal basso verso l'alto (a) e dall'alto verso il basso (b) ($\alpha = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.82$)

Valutazione della temperatura all'interno di una parete

La relazione che descrive la propagazione del calore a regime stazionario può essere scritta in termini infinitesimi nella forma:

$$\varphi' = -dt / dR'.$$

Integrando (φ' = **cost**) questa espressione tra t_i e la generica **t** e tra i corrispondenti limiti **R' = 0** ed **R' = R'** si può scrivere:

$$(t_i - t) = \varphi' \cdot R'$$

e cioè **t** varia linearmente in funzione della resistenza termica specifica **R'**. Poiché è anche:

$$\varphi' = (t_i - t_e)/ R'_t$$

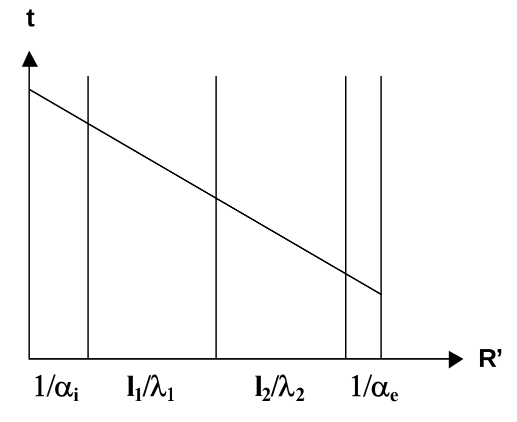
la relazione che fornisce la temperatura **t** corrispondente al valore della generica resistenza **R'** è:

$$t = t_i - (t_i - t_e) \cdot R'/ R'_t$$

Si consideri una struttura edilizia di trasmittanza **K**. La corrispondente resistenza termica risulta:

$$R'_t = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_i \frac{l_{ni}}{\lambda_{ni}} + \frac{1}{\alpha_e} \qquad [m^2\ K/W]$$

Poiché a regime stazionario (φ' = **cost**) la temperatura **t** varia linearmente con **R'**, è possibile rappresentare questa distribuzione in un diagramma (**R', t**), come rappresentato in figura, ad esempio nel caso di un bistrato. Si può osservare che la pendenza della distribuzione rappresenta l'entità del **flusso** termico in accordo con la relazione $\varphi' = -dt / dR'$.



Dal diagramma può facilmente ricavarsi per via grafica il valore della temperatura in corrispondenza della superficie interna della parete od in un qualunque altro punto

<u>ESERCIZI ED ESEMPI</u>

1) Una parete perimetrale divide un ambiente riscaldato (temperatura $\mathbf{t_i}$ = 20 °C) dall'esterno (temperatura $\mathbf{t_e}$ = –5 °C). La parete è costituita da **3** strati e comprende un'intercapedine d'aria. A partire dall'esterno si incontra:

- strato di calcestruzzo (8 cm., λ_1 = 1.93 W/m K),
- intercapedine d'aria (5 cm),
- strato di mattoni pieni (12 cm., λ_2 = 0.80 W/m K)
- intonaco (1 cm., λ_3 = 1.50 W/m K).

Si vuole determinare:

a) la **trasmittanza K** della parete;

b) il **flusso termico specifico** trasmesso;

c) la **temperatura superficiale** di parete interna;

d) la **temperatura sulla superficie esterna** dell'intercapedine.

a) – **trasmittanza K**:

La resistenza specifica totale vale:

$$\mathbf{R'_t = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_i \frac{l_{ni}}{\lambda_{ni}} + R'_{in} + \frac{1}{\alpha_e}}$$

Dal diagramma relativo alla resistenza termica specifica per intercapedini verticali si ottiene per **L** = 5 (cm) e $\alpha = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \mathbf{0.82}$:

$$\mathbf{R'_{in}} = \mathbf{0.15}\ (\mathrm{m^2\,K/W})$$

E quindi si ottiene:

$$\mathbf{K = \frac{1}{R'_t} = \frac{1}{\frac{1}{8.1} + \frac{0.01}{1.5} + \frac{0.12}{0.80} + 0.15 + \frac{0.08}{1.93} + \frac{1}{23.3}} = 1.80} \qquad \left[\mathbf{\frac{W}{m^2 K}}\right]$$

b) – **flusso termico specifico**:

$$\boldsymbol{\varphi' = K\ (t_i - t_e)}$$

$$\boldsymbol{\varphi' = 1.80 \cdot [20 - (-5)] = 45} \qquad \mathbf{[W/m^2]}$$

c) – **temperatura superficiale di parete interna**:

Si può scrivere:

$$\boldsymbol{\varphi' = \alpha_i \cdot (t_i - t_{pi})}$$

da cui:

$$\mathbf{t_{pi} = t_i - \frac{\varphi'}{\alpha_i}}$$

$$\mathbf{t_{pi} = 20 - \frac{45}{8.1} = 14.4 \qquad °C}$$

e) - **temperatura sulla superficie esterna** dell'intercapedine:

Si può scrivere:

$$\mathbf{t \quad = t_i - (t_i - t_e) \cdot \frac{R'}{R_t^{'}}}$$

dove:

R_t' = 1/K =0.556 **[m^2 K/W]**

R' = res. termica fino alla **superficie esterna** dell'intercapedine (compresa):

$$\mathbf{R' = \frac{1}{8.1} + \frac{0.01}{1.5} + \frac{0.12}{0.8} + 0.15 = 0.43 \qquad [m^2 K / W]}$$

da cui:

$$\mathbf{t \quad = 20 - (20 - (-5)) \cdot \frac{0,43}{0.556} \cong 0.66°C}$$

2) La temperatura dell'aria interna a un capannone a struttura metallica è pari a $\mathbf{t_a}$ = 15 °C. Supponendo che la trasmittanza della parete perimetrale sia **K** = 2.5 [W/m^2 K] e che la temperatura esterna $\mathbf{t_e}$ = -2 °C, determinare l'incremento della temperatura di parete interna $\mathbf{t_{pi}}$ se sulla parete si mette in opera uno strato di isolante spesso 2 cm. (λ_{is} = 0.035 W/m K).

$$\mathbf{R_t' = 1/K = 1/2.5 = 0.4 \qquad [m^2K/W]}$$

Da cui:

$$\mathbf{\varphi' = -\frac{\Delta t}{R_t^{'}} = -K \cdot \Delta t = 42.5 \qquad [W / m^2]}$$

$$\mathbf{\varphi' = \alpha_i \cdot (t_a - t_{pi})}$$

$$\mathbf{t_{pi} = t_a - \frac{\varphi'}{\alpha_i}}$$

$$\mathbf{t_{pi} = 15 - \frac{42.5}{8.1} \cong 9.75 \qquad °C}$$

Sia ora $\overline{R_t'}$ la resistenza termica specifica dopo l'aggiunta dello strato isolante:

$$\overline{R_t'} = R_t' + \frac{l_{is}}{\lambda_{is}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{R_t'} = 0.4 + \frac{0.02}{0.035} \cong 0.97 \qquad [m^2 K / W]$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{\varphi'} = \frac{15+2}{0.97} = 17.5 \qquad [W / m^2]$$

da cui

$$\overline{t_{pi}} = t_a - \frac{\overline{\varphi'}}{\alpha_i}$$

$$\overline{t_{pi}} = 15 - \frac{17.52}{8.1} \cong 12.8 \qquad °C$$

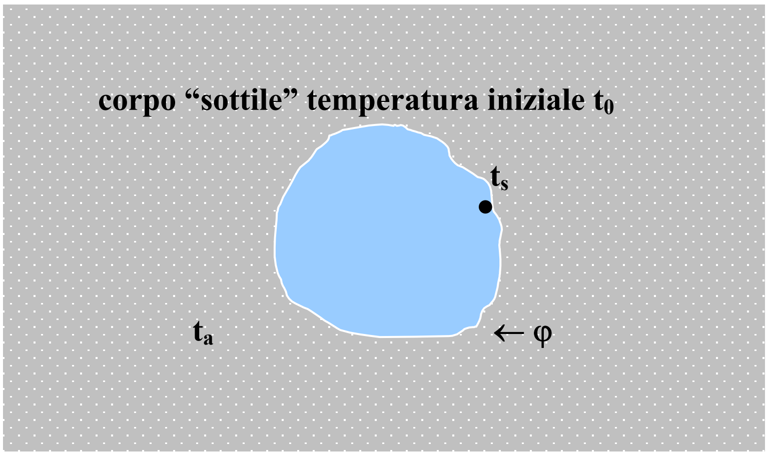
cosicché l'incremento della temperatura di parete interna risulta pari a:

$$\overline{t_{pi}} - t_{pi} = 12.8 - 9.75 = 3.08 \qquad °C$$

3) **Esempio.** Un corpo di materiale omogeneo ed isotropo inizialmente caratterizzato dalla temperatura $\mathbf{t_0}$, è posto in un ambiente ove la temperatura risulti diversa ($\mathbf{t_a}$). Come ben noto il corpo scambierà calore per **convezione** ed **irraggiamento** (coefficiente liminare α_i) e cioè si raffredderà o si riscalderà fino a raggiungere asintoticamente nel tempo la necessaria condizione di equilibrio termico finale. Ad esempio se $\mathbf{t_a << t_0}$, il corpo si raffredderà fino a raggiungere la temperatura $\mathbf{t_a}$.

Il fenomeno è tipicamente non stazionario e può essere risolto in forma semplice se si assume che il corpo possa essere considerato **"sottile"**. Questa ipotesi semplificativa ipotizza che durante il transitorio di temperatura (da $\mathbf{t_0}$ fino a raggiungere la temperatura finale $\mathbf{t_a}$) in ogni momento la temperatura del corpo **t** sia $\mathbf{t = t(\tau)}$ e non $\mathbf{t = t(x, y, z,)}$.

Perché l'ipotesi sia realistica occorre che il corpo sia di dimensioni ridotte, la sua conducibilità termica elevata ed il coefficiente liminare α_i non troppo grande. Per semplicità si ipotizzi che la temperatura $\mathbf{t_a}$ sia costante.



È lecito scrivere:

$$\mathbf{1)} \qquad \varphi = \frac{dQ}{d\tau} = -\alpha_i \cdot A \cdot (t_s - t_a)$$

dove **A** rappresenta la superficie esterna del corpo. La quantità infinitesima di calore scambiata nel tempo **d** τ può essere scritta :

$$dQ = -\alpha_i \cdot A \cdot (t_s - t_a) \cdot d\tau = -\alpha_i \cdot A \cdot (t - t_a) \cdot d\tau$$

essendo sempre $\mathbf{t = t_s}$

A seguito dello scambio termico, il corpo varierà la sua temperatura :

$$\mathbf{2)} \qquad dQ = M \cdot c \ \ \cdot dt = \rho \cdot V \cdot c \ \ \cdot dt$$

dove:

M = massa del corpo; **c** = calore specifico del materiale; ρ = densità del materiale; **V** = volume del corpo.

Combinando la **1)** con la **2)** si ottiene:

$$-\alpha_i \cdot A \cdot (t - t_a) \cdot d\tau = \rho \cdot V \cdot c \ \ \cdot dt$$

e cioè si ottiene un’equazione differenziale del I ordine da risolvere con la condizione iniziale che per τ **= 0** sia $\mathbf{t = t_0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = -\dfrac{\alpha_i \cdot A}{\rho \cdot V \cdot c} \cdot (t - t_a) \\ t(0) = t_0 \end{cases}$$

Se si pone:

$$\frac{\alpha_i \cdot A}{\rho \cdot V \cdot c} = \delta$$

l'equazione può essere riscritta :

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = -\delta \cdot (t - t_a) \\ t(0) = t_0 \end{cases}$$

Poiché $\mathbf{d(t - t_a) = dt}$ è lecito scrivere anche:

$$\frac{d(t - t_a)}{d\tau} = -\delta \cdot (t - t_a)$$

e, separando le variabili:

$$\frac{d(t - t_a)}{t - t_a} = -\delta \cdot d\tau$$

Integrando:

$$\log\ (t - t_a) = -\delta \cdot t + C$$

Ricordando la condizione iniziale $\mathbf{t = t_0}$ per $\tau = \mathbf{0}$

$$C = \log\,(t_0 - t_a)$$

Risulta allora:

$$\log \frac{t - t_a}{t_0 - t_a} = -\delta \cdot \tau$$

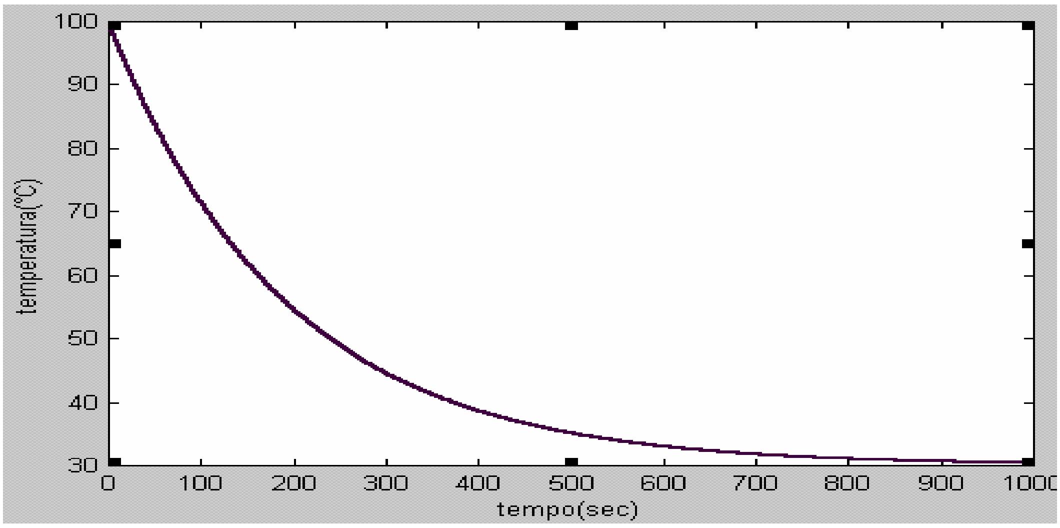
e cioè:

$$t = (t_0 - t_a) \cdot e^{-\delta\tau} + t_a$$

Ove il corpo sottile fosse una lastra di ferro quadrata di 1 dm^2 di superficie, alta 1 mm:

A = 0.0204	*Superficie esterna*	$[m^2]$
$\mathbf{c_p = 1005}$	*Calore specifico materiale*	[J/kgK]
$\mathbf{\rho = 7800}$	*Densità corpo*	$[kg/m^3]$
$\mathbf{V = 10^{-5}}$	*Volume corpo*	$[m^3]$
$\mathbf{\alpha_\iota = 20}$	*Coefficiente di scambio liminare*	$[W/m^2K]$

Se $\mathbf{t_0 = 100}$ **°C** e $\mathbf{t_a = 30}$ **°C** la temperatura del corpo varia, nel tempo, come rappresentato in figura.



Se si pone:

$$\tau_0 = \frac{1}{\delta} = \frac{\rho c V}{\alpha_i A}$$

si ottiene la **costante di tempo τ_0** [s] il cui significato è facilmente interpretabile:

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_a) \cdot \mathbf{e}^{-\delta\tau} + \mathbf{t}_a$$
$$\text{e per } \tau = \tau_0$$
$$\frac{(\mathbf{t} - \mathbf{t}_a)}{(\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_a)} = \mathbf{e}^{-\frac{\tau}{\tau_0}} = \mathbf{e}^{-1} = \frac{1}{2.718} = 0.63$$

Quanto sopra significa che, trascorso l'intervallo di tempo τ_0, la variazione di temperatura del sistema che si è verificata **(t - t_a)** è pari al 63,2% della variazione finale **(t_o –t_a)**.