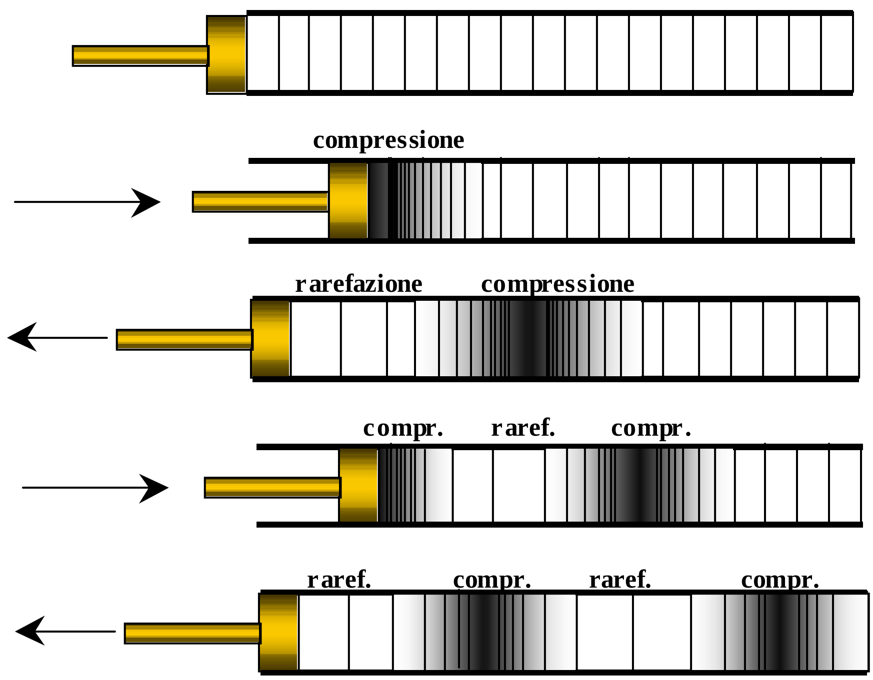
CAPITOLO 10

ELEMENTI DI ACUSTICA FISICA

10.1 Generalità

L'esperienza mostra che quando una superficie, o una sua porzione, vibra con frequenza opportuna, le vibrazioni prodotte si trasmettono attraverso l'aria fino a raggiungere il nostro orecchio ove vengono percepite come **suono**. Il movimento alternato del pistone all'imbocco di un tubo a pareti rigide, rappresentato in figura, genera un suono.



Lo strato d'aria a contatto del pistone è, quindi, alternativamente compresso e rarefatto per cui la sua pressione e la sua densità vengono ad assumere nel tempo valori superiori e inferiori rispetto al fluido indisturbato. La differenza di pressione, a sua volta, si trasmette nello strato adiacente e così via. In altre parole, nel tubo si forma una perturbazione di pressione e, cioè, **un'onda sonora** in moto nella direzione **x**. Ogni strato fluido viene poi a muoversi, avanti e indietro, nella direzione **x** e cioè nella **stessa direzione in cui si muove l'onda**. Le onde sonore sono, quindi, **onde longitudinali** a differenza delle onde elettromagnetiche ove le perturbazioni (campi elettrici e magnetici) si attuano **trasversalmente** alla direzione di propagazione. È opportuno precisare subito che la perturbazione della pressione locale nel tempo $\Delta P(\tau) = P(\tau) - P_o$ è sempre molto piccola rispetto alla pressione atmosferica P_o. Ad esempio, per i suoni usuali, la $\Delta P(\tau)$ risulta compresa tra circa $2 \cdot 10^{-5}$ [Pa] (soglia dell'udibilità) e **20** [Pa] (soglia del dolore) e, pertanto, di entità sempre molto ridotta rispetto a P_o (circa 101300 [Pa]). In seguito, per semplicità, si indicherà semplicemente con $p = p(x,\tau)$ l'entità della perturbazione di pressione $\Delta P = \Delta P\,(x,\tau)$.

10.2 Equazione di propagazione delle onde sonore

Nel caso di propagazione **unidimensionale** in un mezzo vale la seguente relazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

c = costante rappresentante la **velocità di propagazione dell'onda**.

In riferimento ad un elemento di fluido l'equazione suddetta può essere ottenuta a partire da:

- **secondo principio della dinamica ($\sum F = m\,a$);**
- **equazione di conservazione della massa;**
- **equazione che descrive il processo di deformazione del mezzo.**

Nel caso di aria, la compressione/dilatazione dell'elemento di fluido si attua adiabaticamente, per cui vale la relazione $P \cdot v^k = \cos t.$ e, quindi, si ottiene:

$$c^2 = k \cdot \frac{P_o}{\rho_o}$$

Nel caso di un solido o un liquido si ha, invece:

$$c^2 = \frac{E}{\rho_o}$$

ove:

E = modulo di elasticità [N/m^2]

Nel caso di onda sonora in aria a pressione e temperatura di riferimento ($\mathbf{P_o}$ = 101300 [Pa]; $\mathbf{T_o}$ = 293 [K]; $\mathbf{k = {}^{c_p}\!/\!_{c_v} = 1.4}$), si ha:

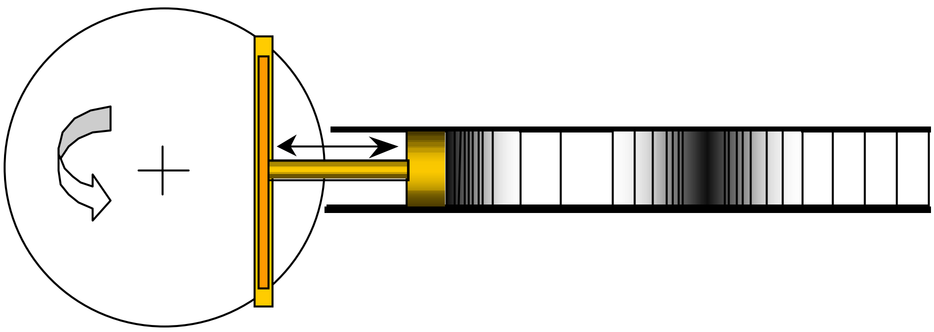
$$\mathbf{c = \sqrt{k \cdot \frac{P_o}{\rho_o}} = \sqrt{k \cdot R_a \cdot T_o} = \sqrt{1.4 \cdot 286 \cdot 293} = 344\ [m/s]}$$

Con $\mathbf{P_o}$ = **cost.** risulta **c** = **f(T)**. In mezzi diversi da un gas, come visto, risulta $\mathbf{c = \sqrt{E/\rho_o}}$, per cui si ottengono indicativamente valori **c** assai diversi, elencati nella seguente tabella (in ordine crescente rispetto a **c**):

Materiale	Velocità c [m/s]
Piombo	1220
Acqua	1370
Mattoni	3000
Legno	3350
Calcestruzzo	3400
Vetro	4100
Alluminio	4920
Acciaio	5100

10.3 Suoni puri

Si consideri il caso rappresentato in figura e si supponga che il disco cui è collegato il pistone ruoti con velocità angolare **ω = cost.** = **2πf**.



Come rappresentato in figura, la posizione **x(τ)** del pistone è determinata dal collegamento rigido con l'asola rettangolare entro cui si posiziona un piolo fissato sul bordo del disco. In conseguenza il moto del pistone è armonico.

Risulta, cioè:

$$\mathbf{x(\tau) = A\cos(\omega\tau + \delta) = A\cos(2\pi f\tau + \delta)}$$

dove:

A = ampiezza massima di spostamento del pistone [m];

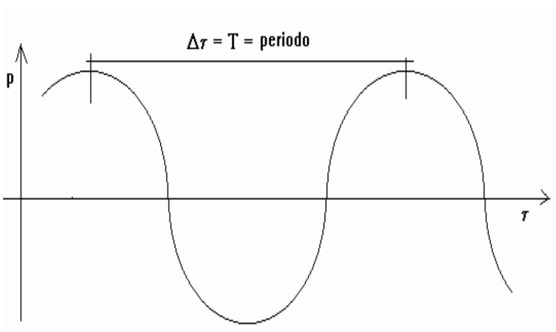
δ = angolo di fase (determinato dalla posizione del piolo all'istante τ **= 0**).

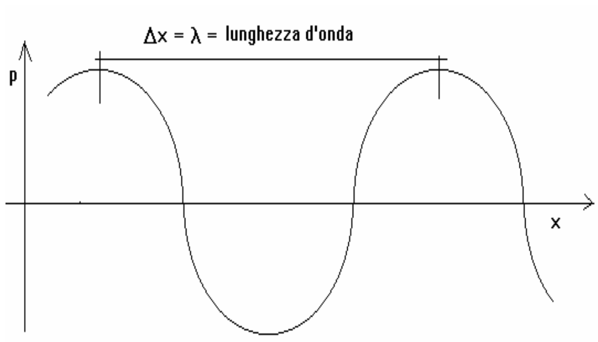
In questo caso, anche l'onda piana che si propaga nel tubo è di tipo sinusoidale ed è descritta dalla seguente soluzione dell'equazione di propagazione:

$$\mathbf{p = p(x,\tau) = p_{max} \cos [\omega (\tau - x/c)]}$$

La soluzione prevede che:

- in ogni punto (**x = cost.**), la pressione **p** vari nel tempo come un coseno (pulsazione ω; periodo $\mathbf{T = 1/f = 2\pi/\omega}$).
- in ogni istante (τ **= cost.**), la pressione **p** sia distribuita nello spazio come un coseno (vedi figure seguenti).



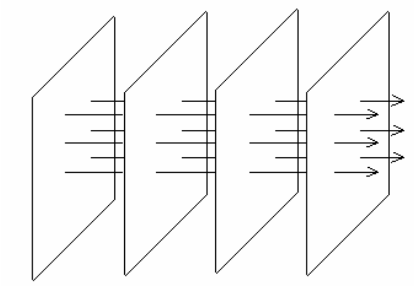


Durante un'oscillazione completa (che richiede un intervallo di tempo (periodo **T**) l'onda si sposta di una quantità **Δx** detta **lunghezza d'onda** λ.

Pertanto, la velocità **c** è data da:

$$\mathbf{c = \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f}$$

Questa modalità di propagazione è detta **propagazione per onde piane progressive**.



Il campo sonoro (regione dello spazio ove sono presenti le onde) può essere schematizzato come in figura a lato. Se si considera un elemento di aria all'ascissa **x** (volume **A dx,** superficie **A** normale alla direzione di propagazione dell'onda, **dx** spessore dell'elemento, densità ρ_o) e si applica a questo il II° principio della dinamica, si giunge a **:**

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}$$

ove **u** rappresenta la velocità istantanea dell'elemento lungo **x**.

Poiché, $\mathbf{p = p_{max} \cos [\omega (\tau - x/c)]}$, si ha:

$$\mathbf{u = u\ (x,\tau)} = -\frac{1}{\rho_o}\int\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}\ \mathbf{d}\tau = \frac{\mathbf{p_{max}}}{\rho_o \cdot \mathbf{c}}\cdot \mathbf{cos}\left[\omega\cdot(\tau - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{c}})\right]$$

In questo caso la pressione **p** e la velocità **u** sono **in fase** tra loro. Risulta, quindi:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{\rho_o \cdot \mathbf{c}}$$

Per aria a t = 20 [°C] e $\mathbf{P_o}$ = 101300 [Pa], risulta: $\rho_o\mathbf{c}$ = 1.2 · 344 = 412 [kg/m^{2}s].

Si consideri ora il fenomeno dal punto di vista energetico. Un'onda piana progressiva che si propaga in un mezzo trasporta energia. Riferendosi ad un elemento di volume del mezzo, si osserva che questo **oscillando** attorno alla sua posizione di equilibrio varia sia la sua **energia cinetica** che **potenziale**. All'ascissa **x** transita attraverso l'area **A** normale alla direzione di propagazione delle onde, la potenza energetica istantanea **Π(τ).** Si definisce **intensità sonora istantanea I(τ)** :

$$\mathbf{I}(\tau) = \frac{\Pi(\tau)}{\mathbf{A}}$$

La potenza istantanea **Π(τ)** può essere espressa dal prodotto della forza agente sull'elemento **F(τ)** per la velocità istantanea di questo **u(τ)**. Si può scrivere:

$$\mathbf{I}(\tau) = \frac{\Pi(\tau)}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{F}(\tau)\cdot\mathbf{u}(\tau)}{\mathbf{A}} = \mathbf{p}(\tau)\cdot\mathbf{u}(\tau)$$

L'intensità sonora, definita dal prodotto pressione-velocità istantanea, è una grandezza vettoriale. L'**intensità media** trasportata attraverso la superficie **A** da un'onda piana progressiva in un periodo T, è data da:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{p\ u\ d\tau}$$

ma, essendo $\mathbf{u = p/\rho_o c}$**,** risulta:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{p^2}{\rho_o c} d\tau = \frac{1}{\rho_o c}\frac{1}{T}\int_0^T p^2 d\tau = \frac{p_e^2}{\rho_o \cdot c}$$

L'intensità media **I** è quindi proporzionale alla quantità $\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{p^2 d\tau}$ indicata come $\mathbf{p_e}^2$ e cioè al valore della **pressione efficace al quadrato**.

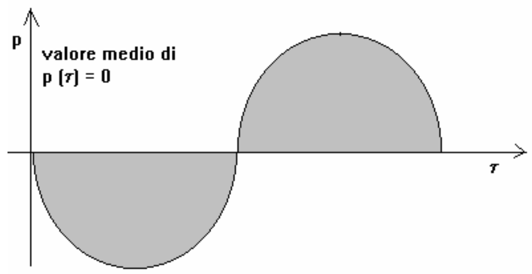
La pressione efficace $\mathbf{p_e}$ viene anche detta **valore quadratico medio** di $\mathbf{p(\tau)}$**:**

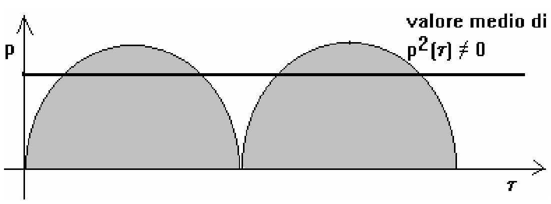
$$\mathbf{p_e} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p^2 d\tau}$$

Nel caso di **onde sinusoidali o cosinusoidali** risulta $\mathbf{p_e^2 = p^2_{max}/2}$ e, cioè**:**

$$\mathbf{I} = \frac{p_e^2}{\rho_o \cdot c} = \frac{p^2_{max}}{2\rho_o c}:$$

La figura evidenzia come il valor medio, ad esempio di una funzione $\mathbf{p(\tau)}$ sinusoidale sia nullo sul periodo **T** mentre sia invece diverso da zero il valore medio della funzione $\mathbf{p^2(\tau)}$.





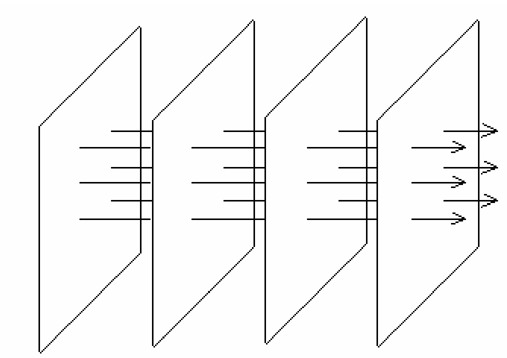
Pertanto, una volta noto il valore locale della pressione $\mathbf{p_e}$, sarà possibile conoscere anche l'intensità energetica **I** dell'onda acustica. Dal punto di vista pratico, la misura della pressione sonora $\mathbf{p_e}$ è più semplice strumentalmente proprio perché rappresenta un rapporto tra una forza e una superficie.

Oltre alla già citata grandezza vettoriale intensità sonora **I**, è opportuno introdurre un'altra grandezza scalare molto utilizzata soprattutto nel campo dell'acustica architettonica e cioè la *densità sonora* **D**.

La **densità sonora** è definita come l'*energia, associata alle onde acustiche, presente per unità di volume del mezzo* e, cioè:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{V}} \qquad [\mathrm{J/m^3}]$$

Si consideri un'onda piana progressiva che si propaga nella direzione **x** (vedi figura), attraverso la sezione di controllo **A.**



L'energia **E** che, trascorso il tempo $\Delta\tau$, è passata attraverso la superficie **A** è, ovviamente pari a $\Pi\ \Delta\tau$.

Il volume **V** in cui si trova tutta l'energia transitata **E** è pari a:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\ \Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\ \mathbf{c}\Delta\tau.$$

Pertanto, la densità sonora è:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{V}} = \frac{\Pi \cdot \Delta\tau}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \cdot \Delta\tau} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{c}}$$

10.4 Cenni sulla composizione di onde sonore piane

Si considerino due onde sonore piane progressive che si propaghino nella direzione **x**, ciascuna delle quali singolarmente determini in un punto **x** la perturbazione $\mathbf{p_1(\tau)}$ e $\mathbf{p_2(\tau)}$. Se le due perturbazioni sono sovrapposte la pressione risultante $\mathbf{p(\tau)}$ sarà pari alla somma dei due contributi:

$$\mathbf{p(\tau) = p_1(\tau) + p_2(\tau)}$$

Se fosse $\omega_1 = \omega_{2.}$ e $\mathbf{p_{max,1}} := \mathbf{p_{max,2}}$, si avrebbe:

$$\mathbf{p_1(\tau) = p_{max,1} \cos(\omega_1 \tau + \delta_1)}$$

$$\mathbf{p_2(\tau) = p_{max,1} \cos(\omega_1 \tau + \delta_2)}$$

Il quadrato della pressione efficace sarà, quindi :

$$\mathbf{p_e^2 = p_{e1}^2 + p_{e2}^2 + 2\, p_{e1}\, p_{e2} \cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

Si può notare che l'espressione ottenuta fornisce risultati diversi in relazione alla differenza di fase $(\delta_1 - \delta_2)$ tra le due onde. Infatti, se $(\delta_1 - \delta_2) = \mathbf{0}$ e cioè le onde sono in fase, si ottiene $\mathbf{p_e^2 = 4 \cdot p_{e1}^2}$ mentre se $(\delta_1 - \delta_2) = \pi/\mathbf{2}$ e cioè le onde sono in antifase tra loro si avrà $\mathbf{p_e^2 = 0}$.

In altre parole, un'onda sonora potrebbe essere completamente annullata, mediante la sovrapposizione a questa di un'onda di identica ampiezza ma sfasata di $\pi/2$.

Nel caso più generale, quando si sovrappongano due onde con $\omega_1 \neq \omega_2$, con $\mathbf{p_{max,1} \neq p_{max,2}}$ e con δ_1 e δ_2 qualunque, la pressione efficace $\mathbf{p_e^2}$ (**mediata su un intervallo di tempo sufficientemente lungo**) risulta:

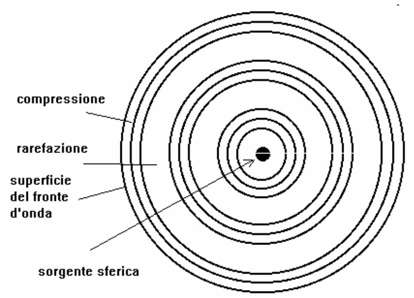
$$\mathbf{p_e^2 = p_{e1}^2 + p_{e2}^2}$$

In questo caso, infatti, il prodotto $\mathbf{[p_1(\tau)\ p_2(\tau)]}$ che compare nell'espressione $\mathbf{p^2(\tau) = p_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + 2\, p_1(\tau)\, p_2(\tau)}$ si annulla.

In generale, pertanto, la **pressione efficace risultante** dalla composizione di **i** onde qualunque è pari alla **somma delle pressioni efficaci delle singole onde**:

$$\mathbf{p_e^2 = \sum_i p_{ei}^2}$$

10.4.1 Propagazione per onde sferiche progressive



Una sorgente costituita da una sfera pulsante di piccole dimensioni e che generi fronti d'onda, non più piani, ma a simmetria sferica come rappresentato in figura è un esempio di **sorgente isotropa**.

L'equazione generale di propagazione assume, in questo caso, la forma:

$$\mathbf{c}^2\left[\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\mathbf{x}^2}+\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}^2}+\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\mathbf{z}^2}\right]=\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\tau^2}$$

essendo: $\mathbf{p = p(x,y,z,\tau)}$.

All'allontanandosi dalla sorgente, la superficie interessata alla propagazione delle onde aumenta proporzionalmente al quadrato della distanza. Indicando con Π la potenza acustica complessiva emessa, l'intensità **I** relativa a una superficie di controllo **dA** a distanza **r** dalla sorgente e normale ai fronti d'onda emessi risulta:

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{d\Pi}}{\mathbf{dA}}=\frac{\mathbf{\Pi}}{\mathbf{4\pi r^2}}$$

Se la sorgente non è isotropa ma, ad esempio, emette preferenzialmente onde sonore in particolari direzioni, si introduce un **fattore di direttività Q** definito da:

$$\mathbf{Q}=\frac{\mathbf{p_e^2}}{\mathbf{p_{e,is}^2}}$$

ove:

$\mathbf{p_{e,is}}^2$ = pressione efficace che sarebbe provocata dalla sorgente isotropa emettente la stessa potenza Π.

10.4.2 Propagazione per onde stazionarie

Questo tipo di propagazione può essere considerato un caso particolare di propagazione d'onde piane. Le **onde stazionarie**, che spesso si riscontrano in ambienti chiusi, sono dovute alla sovrapposizione di onde che viaggiano in senso opposto come conseguenza delle riflessioni tra pareti. Si consideri, ad esempio, un'onda piana progressiva che si propaga nella direzione **x** :

$$\mathbf{p_1 = p_{max,1}\cdot cos[\omega\cdot(\tau-\frac{x}{c})]}$$

Se questa onda si somma con un'onda progressiva che si propaghi in senso opposto e, cioè, con l'onda:

$$\mathbf{p_2 = p_{max,2} \cdot \cos[\omega \cdot (\tau + \frac{x}{c})]}$$

si ottiene, complessivamente:

$$\mathbf{p = p_{max,1} \cdot \cos[\omega \cdot (\tau - \frac{x}{c})] + p_{max,2} \cdot \cos[\omega \cdot (\tau + \frac{x}{c})]}$$

Nel caso particolare in cui l'ampiezza delle onde sia $\mathbf{p_{max,1} = p_{max,2}}$ ricordando la nota relazione trigonometrica (prostaferesi):

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

si ricava:

$$\mathbf{p = 2p_{max,1} \cdot \cos(\omega\tau) \cdot \cos(\frac{\omega x}{c})}$$

L'espressione ottenuta evidenzia una perturbazione di pressione sempre nulla nel tempo (**p = 0**) in tutti i punti (**nodi)** in cui risulti :

$$\mathbf{\frac{\omega x}{c} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (\Rightarrow \quad x = \frac{c\pi}{\omega} \cdot \frac{2n+1}{2})}$$

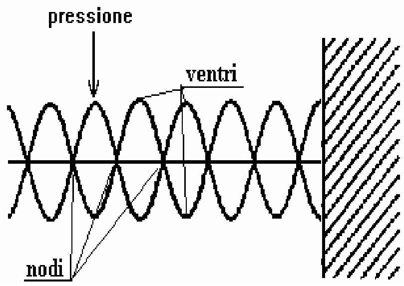
con:

$$\mathbf{n = 0,\ 1,\ 2,\ ...}$$

Invece, in tutti i punti (**ventri**) in cui risulti:

$$\mathbf{\frac{\omega x}{c} = n\pi \qquad (\Rightarrow \quad x = \frac{n\pi c}{\omega})}$$

si avrà **p** che varia cosinusoidalmente nel tempo.

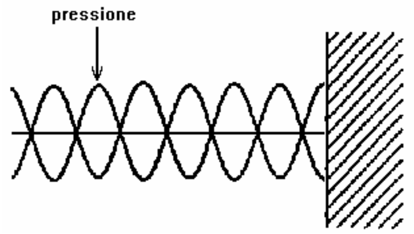


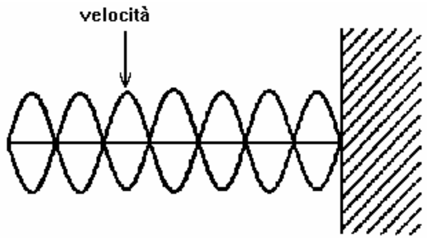
Un sistema di onde siffatto (onde stazionarie) si ottiene quando un'onda diretta verso una parete rigida molto riflettente (a destra), si compone con l'onda di ritorno che è riflessa con pressoché pari ampiezza. La figura rappresenta qualitativamente, ad un certo istante di tempo, come è distribuita la pressione **p.**

Se invece della **p** ci si riferisce alla velocità **u** di un elemento d'aria, risulta:

$$\mathbf{u = u\ (x,\tau) = -\frac{1}{\rho_o}\int \frac{\partial p}{\partial x} d\tau = 2\frac{p_{max}}{\rho_o c} sen(\frac{\omega x}{c}) \cdot sen(\omega\tau)}$$

Pertanto, anche la velocità **u** assume valori nulli in corrispondenza ad alcuni punti delle **x**, ma **u e p risultano tra loro sfasate** di $\frac{\pi}{2}$ (vedi figure seguenti).





10.5 Suoni complessi - Spettri acustici

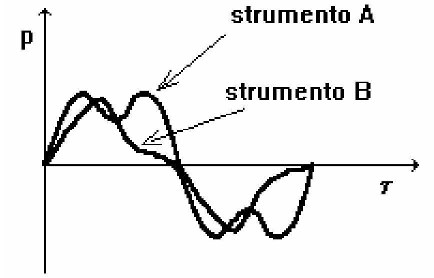
Se la perturbazione acustica è di tipo **sinusoidale o cosinusoidale,** il suono corrispondente è detto **puro**. I suoni emessi dagli strumenti musicali, pur periodici (frequenza definita), sono **suoni complessi**. Al fine di meglio comprendere questi concetti, è opportuno richiamare l'equazione di propagazione:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \tau^2}$$

Questa equazione differenziale è **lineare**, per cui se $\mathbf{p_1 = p_1 (x,\tau)}$ è una soluzione e $\mathbf{p_2 = p_2 (x,\tau)}$ è un'altra soluzione, anche una loro combinazione lineare, ad esempio la loro somma $\mathbf{p = p_1 + p_2}$, è una soluzione.

Nell'esempio precedente una **perturbazione sinusoidale** di pressione veniva generata dal **movimento sinusoidale** del pistone nel cilindro e il suono era **puro**. Si supponga invece, che il pistone, come rappresentato in figura, si muova di moto periodico ma non sinusoidale, ad esempio con un collegamento tale da seguire il profilo di una camma ad esempio a forma di elisse. In queste condizioni il moto del pistone, seppur periodico, non risulta più sinusoidale. In particolare, ruotando la camma con velocità angolare ω, si genera una perturbazione di pressione periodica, ma con forma d'onda non sinusoidale.

La diversa forma d'onda di suoni con la stessa frequenza viene avvertita dall'orecchio che attribuisce al suono un attributo caratteristico (legato alla *forma dell'onda*) detto **timbro**. Ad esempio, si parla del timbro di una nota emessa dallo strumento musicale **A** e di un timbro diverso nel caso dello strumento musicale **B**.



Come già ricordato in precedenza, una perturbazione di carattere periodico, sulla base del teorema di **Fourier**, può essere espressa come la somma di un certo numero di componenti sinusoidali o componenti armoniche e, cioè:

$$\mathbf{p(x,\tau)= p_{max,1} \cos \omega\tau + p_{max,2} \cos 2\omega\tau +..+ p_{max,1} sen\ \omega\tau + p_{max,2} sen\ 2\omega\tau +...}$$

in cui:

ω = pulsazione fondamentale;

2ω, 3ω, ... = armoniche superiori.

Questa relazione può anche essere posta nella forma :

$$\mathbf{p(x,\tau) = p_{max,1} \cos (\omega\tau + \delta_1) + p_{max,2} \cos (2\omega\tau + \delta_2) +....}$$

ove:

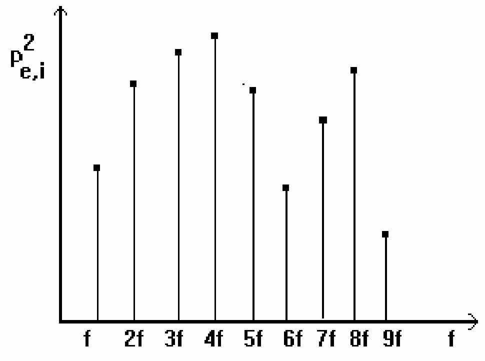
δ_1, δ_2, ... = angoli di fase.

Si può osservare che è, quindi, possibile sintetizzare qualunque forma d'onda periodica $\mathbf{p(x,\tau)}$, una volta note la frequenza fondamentale $\mathbf{f = \omega/2\pi}$ e, per un numero sufficiente di armoniche, le $\mathbf{p_{max,i}}$ e i relativi angoli di fase δ_i.

Il problema può essere semplificato perché l'orecchio risulta solo sensibile al quadrato delle ampiezze delle armoniche e cioè alle $\mathbf{p^2_{e,i}}$ senza avvertire gli angoli di fase δ_i .In altre parole, l'orecchio è sensibile solo alle "dosi" d'intensità $\mathbf{I_i}$ che caratterizzano le singole armoniche di un suono periodico:

$$\mathbf{I_i = \frac{p^2_{e,i}}{\rho \cdot c}}$$

In uno **spettro acustico**, le armoniche vengono rappresentate con un segmento di lunghezza proporzionale al quadrato della pressione efficace $\mathbf{p_{e,i}}^2$ posizionato alla frequenza che compete all'armonica stessa, come rappresentato in figura a lato.



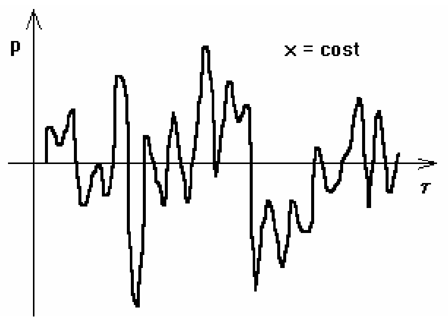
Per un suono periodico con più componenti il quadrato della pressione efficace complessiva $\mathbf{p_e}^2$ è pari a $\sum \mathbf{p^2_{e,i}}$.

Una nota musicale suonata da un pianoforte è un suono complesso le cui componenti armoniche sono diverse rispetto alla stessa nota suonata, però, da un diverso strumento. Le due note, di identica frequenza fondamentale, si differenzieranno solo per le ampiezze delle armoniche che compongono le due onde. Si dice, pertanto, come già osservato, che il **timbro** dei due strumenti è diverso.

La sensazione prodotta dal suono sul nostro orecchio, oltre che dal **timbro**, dipende da:

- **altezza tonale**, cioè dalla frequenza fondamentale;
- **ampiezza**, legata all'entità della variazione di pressione indotta nell'aria;

Ovviamente, nella realtà i suoni non sono in genere periodici. Il caso più frequente, infatti, è rappresentato da una forma d'onda (**rumore**) assai irregolare nel tempo (vedi figura).



È opportuno precisare che col termine **suono** in genere si intende una perturbazione di carattere alquanto *regolare*, mentre col termine **rumore** si usa intendere una perturbazione **p(τ)** molto *irregolare* e di carattere erratico, anche se in realtà non esiste una differenziazione più oggettiva tra i due termini. Talvolta, infatti, un suono musicale (e quindi gradito ad alcuni) può essere considerato da altri rumore, in altre parole come una perturbazione di carattere erratico.

Un rumore, in genere, presenta uno spettro di tipo continuo in relazione alla frequenza. Il suo spettro, quindi, non è rappresentato con linee collocate a frequenze in relazione armonica, ma in pratica viene rappresentato per bande, e cioè suddividendo le frequenze acustiche presenti in intervalli detti appunto **bande**.

All'interno d'ogni intervallo, compreso tra due frequenze limiti $\mathbf{f_1}$ (inferiore) e $\mathbf{f_2}$ (superiore), si può, ad esempio, misurare la pressione sonora efficace escludendo con appositi filtri le frequenze maggiori o minori all'intervallo in esame. Le bande più comuni sono bande d'**ottava** e bande di **1/3 d'ottava**. Nell'acustica musicale viene detto **intervallo d'ottava** l'intervallo compreso tra due frequenze $\mathbf{f_1}$ ed $\mathbf{f_2}$ con $\mathbf{f_2 = 2\, f_1}$, ad esempio tra due **DO** successivi sulla tastiera di un pianoforte. Ogni ottava si identifica mediante la frequenza centrale di banda $\mathbf{f_c}$ pari alla media geometrica delle frequenze estreme e, cioè:

$$\mathbf{f_c = \sqrt{f_1 \cdot f_2}}$$

Pertanto, per ogni ottava risulta costante il rapporto tra l'ampiezza della banda $\mathbf{\Delta f = f_2 - f_1}$ e la frequenza centrale $\mathbf{f_c}$:

$$\mathbf{\frac{f_2 - f_1}{f_c} = \frac{2f_1 - f_1}{\sqrt{2f_1^2}} = \frac{f_1}{f_1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

In acustica si usano frequentemente le bande d'ottava **normalizzate**. Sono state normalizzate le seguenti **frequenze centrali $\mathbf{f_c}$ di banda** [Hz]:

16 - 31.5 - 63 - 125 - 250 - 500 - 1000 - 2000 - 4000 - 8000 – 16000

Se si desidera una suddivisione più dettagliata, si possono suddividere le ottave in terzi d'ottava,e cioè ogni ottava (intervallo di frequenza $\mathbf{f_1}$-$\mathbf{f_2}$) viene suddivisa in tre intervalli ($\mathbf{f_1}$-$\mathbf{f_a}$, $\mathbf{f_a}$-$\mathbf{f_b}$, $\mathbf{f_b}$-$\mathbf{f_2}$) in modo tale che i rapporti tra le frequenze estreme siano gli stessi:

$$\mathbf{\frac{f_a}{f_1} = \frac{f_b}{f_a} = \frac{f_2}{f_b}}$$

Si ottiene facilmente:

$$\mathbf{\frac{f_b}{f_a} = 2^{\frac{1}{3}}}$$

Nel caso di una suddivisione in **n** parti dell'ottava vale la seguente relazione tra i due estremi di ogni suddivisione:

$$\mathbf{\frac{f_b}{f_a} = 2^{\frac{1}{n}}}$$

Ad esempio, la scala musicale temperata, notissima in musica classica, si ottiene suddividendo ogni ottava in **12 semitoni** e cioè in intervalli con rapporti eguali tra due generici semitoni successivi:

$$\mathbf{\frac{f_b}{f_a} = 2^{\frac{1}{12}} = 1.059}$$

10.6 Livelli sonori e scala dei decibel

I suoni percettibili dall'orecchio umano variano in un campo di frequenze comprese tra **20** e **20000 [Hz]** e pertanto, in accordo con la relazione $\mathbf{c = \lambda\, f}$, le corrispondenti λ varieranno tra **17 [m]** (20 [Hz]) e **0,017 [m]** (20000 [Hz]).

La pressione $\mathbf{p_e}$ e l'intensità sonora **I** relative ai suoni udibili possono variare entro un campo molto esteso:

- suono appena udibile (soglia percezione) a **1000 [Hz]** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p_{e,min} \cong 2 \cdot 10^{-5}}$ **[Pa]**
- suono intollerabile (soglia del dolore) a **1000 [Hz]** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{p_{e,max} \cong 20}$ **[Pa]**.

Pertanto, il rapporto $\mathbf{p_{e,min} / p_{e,max}}$ assume valori dell'ordine di $\mathbf{10^6}$. Per semplicità d'ora in avanti con **p** s'intenderà sempre la pressione efficace. In termini d'intensità, ricordando la relazione che lega questa grandezza alla pressione efficace, si ottiene un rapporto tra i corrispondenti valori dell'intensità (soglia di percezione e del dolore) dell'ordine di $\mathbf{10^{12}}$.

In conseguenza, per contrarre il campo numerico di variazione delle grandezze utilizzate è opportuno utilizzare una scala logaritmica. In particolare una qualunque grandezza **W** può essere definita sotto forma di **scala di livello** in decibel (**dB**) nel seguente modo:

$$\mathbf{L = 10 \cdot Log \frac{W_1}{W_2}} \qquad [\mathbf{dB}]$$

Questa relazione esprime, in forma logaritmica, un rapporto tra due grandezze delle quali, al fine di definire una scala, una viene assunta come riferimento.

Se $\mathbf{W_2}$ è il riferimento, la relazione precedente definisce il livello di $\mathbf{W_1}$ rispetto a $\mathbf{W_2}$ espresso in decibel. Il livello di **0 dB** corrisponde, evidentemente, a $\mathbf{W_1 = W_2}$.

I livelli che vengono più largamente utilizzati in acustica sono i seguenti:

- **Livello di potenza sonora:**

  $$\mathbf{L_\Pi = 10\ Log \frac{\Pi}{\Pi_{rif}}}\ [\mathrm{dB}]$$ - riferimento $\mathbf{\Pi_{rif} = 10^{-12}}$ **[W]**

- **Livello di intensità sonora:**

  $$\mathbf{L_I = 10\ Log \frac{I}{I_{rif}}}\ [\mathrm{dB}]$$ - riferimento $\mathbf{I_{rif} = 10^{-12}}$ $\mathbf{[W/m^2]}$

- **Livello di pressione sonora:**

  $$\mathbf{L_p = 10\ Log \frac{p^2}{p_{rif}^2}}\ [\mathrm{dB}]$$ - riferimento $\mathbf{p_{rif} = 2 \cdot 10^{-5}}$ **[Pa]** (soglia di udibilità a 1000 [Hz]).

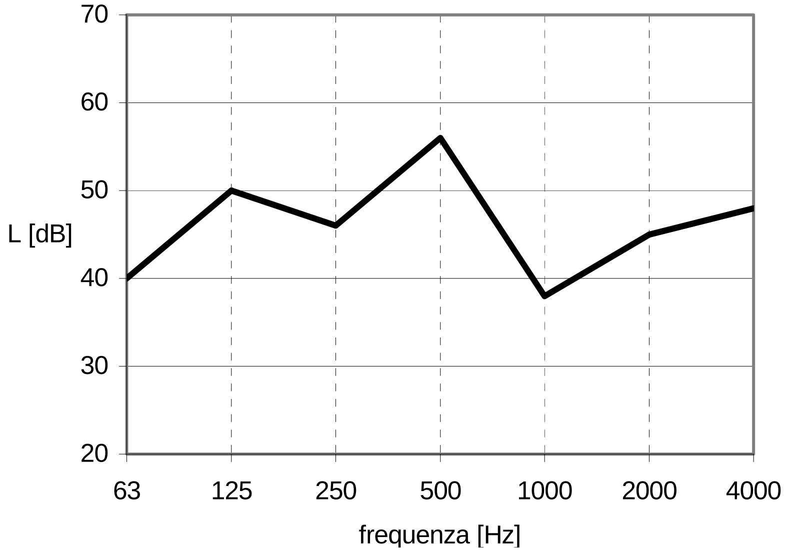
Dei tre livelli introdotti, quello più comunemente usato in acustica è il **livello di pressione sonora**, perché gli strumenti di misura utilizzati (fonometri) sono sensibili alla pressione sonora. Per l'aria a pressione atmosferica risulta:

$$\mathbf{L_p = 10\ Log \frac{p^2}{p_{rif}^2} \cong L_I = 10\ Log \frac{I}{I_{rif}}}$$

Nella seguente tabella si riportano i valori di pressione e i corrispondenti livelli in alcune tipiche situazioni.

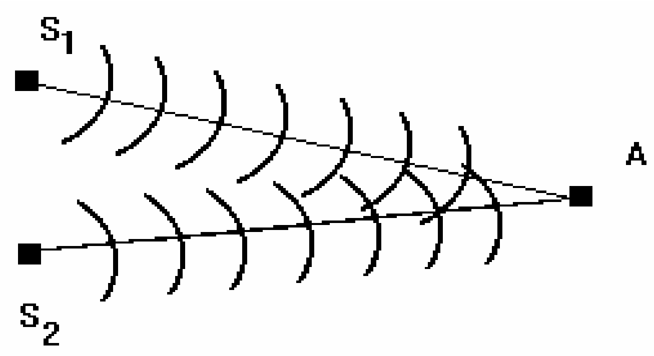
p [Pa]	L_p [dB]	Situazione
$2 \cdot 10^{-4}$	20	Orologio da polso
$2 \cdot 10^{-3}$	40	Camera tranquilla
$2 \cdot 10^{-2}$	60	Automobile a 10 m
$2 \cdot 10^{-1}$	80	Radio volume elevato
2	100	Clacson
20	140	Martello pneumatico (soglia del dolore)

In figura, è riportato lo spettro a bande d'ottava del livello sonoro di un rumore in funzione delle frequenze in bande d'ottava, si osservi come la scala logaritmica contenga il campo numerico di variazione dei relativi valori.



ESERCIZI ED ESEMPI

1) Si valuti il livello d'intensità sonora **I** nel punto **A** (vedi figura) ove con S_1 ed S_2 sono indicate due sorgenti sonore ciascuna delle quali produrrebbe nel punto **A** un livello sonoro rispettivamente pari a L_{I1} ed L_{I2} e che sia $L_{I1} = L_{I2} = 60$ **[dB]**.



L'intensità I_1 in **A** prodotta dalla sorgente S_1 si ottiene immediatamente dalla definizione di livello sonoro:

$$L_{I1} = 60 = 10 \ \mathrm{Log} \frac{I_1}{I_{rif}}$$

Per le proprietà dei logaritmi, si ha:

$$I_1 = 10^6 \ I_{rif}$$

$$I_2 = 10^6 \ I_{rif}$$

Il livello di intensità sonora risultante sarà:

$$L_I = 10 \ \mathrm{Log} \frac{I_1 + I_2}{I_{rif}} = 10 \ \mathrm{Log} \frac{10^6 I_{rif} + 10^6 I_{rif}}{I_{rif}}$$

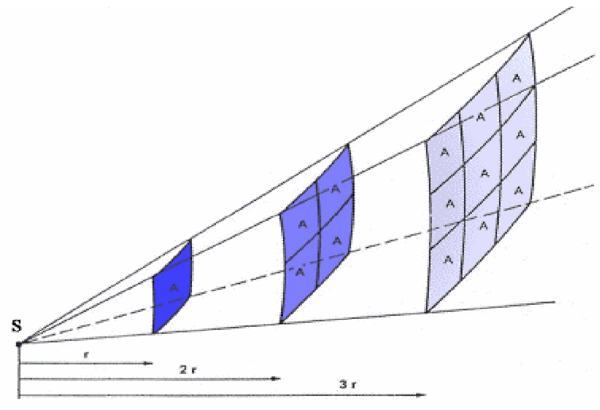
e, cioè:

$$L_I = 10 \ \mathrm{Log} \ (2 \cdot 10^6) = 10 \ \mathrm{Log} \ 2 + 10 \ \mathrm{Log} \ 10^6 = 3 + 60 = 63 \ [\mathrm{dB}]$$

Pertanto, ad un raddoppio dell'intensità sonora in un punto del campo acustico, corrisponde un incremento di **3 [dB]** del livello corrispondente. Se $L_{I1} \neq L_{I2}$ e la differenza tra i due livelli in valore assoluto è maggiore o uguale a 10, il contributo della sorgente più debole al livello sonoro complessivo è trascurabile. Ad esempio, se fosse $\mathbf{L_{I1} = 60}$ **[dB]** e $\mathbf{L_{I2} = 50}$ **[dB]** si otterrebbe:

$$\mathbf{L_I = 10\ Log\ (I_1 + I_2) / I_{rif} = 10\ Log\ (10^6\ I_{rif} + 10^5\ I_{rif}) / I_{rif} = 60.4\ [dB]}$$

2) Si supponga di considerare una sorgente **S** che emetta suono in condizioni di campo libero. Si osservi come la potenza acustica si distribuisca sulla superficie di una sfera. Se si prescinde da un piccolo assorbimento di potenza acustica da parte dell'atmosfera (trascurabile su brevi distanze), la potenza in transito alle diverse distanze è costante ma risulta distribuita su una superficie sempre maggiore come illustrato in figura. In conseguenza l'intensità sonora **I** diminuisce con la distanza **r**.



In riferimento a due valori della distanza $\mathbf{r_1}$ ed $\mathbf{r_2}$ risulta:

$$\mathbf{I_1 = \frac{\Pi}{4\pi r_1^2} \Rightarrow L_{I1} = 10\ \ Log \frac{I_1}{I_{rif}}}$$

$$\mathbf{I_2 = \frac{\Pi}{4\pi r_2^2} \Rightarrow L_{I2} = 10\ \ Log \frac{I_2}{I_{rif}}}$$

La differenza tra i **livelli sonori** alle distanze $\mathbf{r_1}$ ed $\mathbf{r_2}$ è pertanto pari a:

$$\mathbf{\Delta L = 10\ \ Log \frac{I_2}{I_1} = 10\ \ Log \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

Ad esempio, se $\mathbf{r_2 = 2r_1}$ si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{L_{I2} - L_{I1} = -\ 6\ [dB]}$$

E, cioè, il livello sonoro in campo libero diminuisce di **6 [dB]** in corrispondenza al raddoppio della distanza dalla sorgente.