Esercizi relatività ristretta

Massimiliano Virdis

Indice

1 Introduzione

1.1 Premessa

Caro lettore,

questa raccolta di esercizi è dedicata esclusivamente alla relatività ristretta, secondo il livello affrontabile al liceo scientifico. La raccolta è tratta da “Esercizi risolti di fisica”: l’ho estratta da quella per renderla più facilmente trovabile e fruibile da internet. Tutte le considerazioni lì fatte valgono anche per questi esercizi.

Spero che quanto riportato in quest’opera sia se non di aiuto almeno non dannoso. Per migliorare quanto scritto e evidenziare qualsiasi errore non esitate a scrivermi.

email: prof.virdis@tiscali.it

1.2 Notazioni e precisione nei calcoli

In tutta quest’opera si è seguito il S.I., utilizzando per la sua stesura il package siunitx in Xetex.

Per quanto riguarda la precisione dei calcoli riportati si è scelto di indicare i passaggi intermedi con più precisione di quanto le usuali regole per la propagazione degli errori indicherebbero. I risultati finali sono invece riportati, preferibilmente in notazione scientifica, con un numero di cifre significative mai più basso della precisione dei dati di partenza.

1.3 Licenza e Copyright

2 Relatività

2.1 Dilazione dei tempi, contrazione delle lunghezze

Esercizio 1 *Andrea è un astronomo e Marco un astronauta: hanno entrambi* 40 *anni. Marco viene reclutato per fare un viaggio verso la stella Sirio, distante* 8,6 *anni luce, con un'astronave capace di andare alla velocità di* 0,95 c*. Trova:*

1. *quanto tempo dura il viaggio per Andrea e quanto per Marco;*
2. *quanto vale la distanza percorsa per Andrea e quanto per Marco;*
3. *l'età di entrambi quando viene raggiunta la stella.*

Supponiamo che sia Andrea che Marco si trovino ognuno in un sistema di riferimento inerziale. Il tempo e la distanza percorsa sono misurati tra due eventi: la partenza dalla Terra e l'arrivo su Sirio.

1. Per Andrea il tempo é misurato con un orologio posto fermo di fronte a sé. Tuttavia l'evento di partenza e di arrivo avvengono in luoghi differenti: non si tratta di un tempo proprio. Il tempo trascorso può essere ricavato dalla definizione di velocità.

$$v = \frac{\Delta x_0}{\Delta t} \tag{2.1}$$

dove v è la velocità dell'astronave, Δx_0 la distanza tra la Terra e Sirio, misurata stando fermi sulla Terra, e Δt il tempo trascorso.

$$\Delta t = \frac{\Delta x_0}{v} = \frac{8{,}6\ \text{al}}{0{,}95\ \text{c}} = 9{,}1\ \text{anni} = 2{,}9 \times 10^8\ \text{s} \tag{2.2}$$

Se Andrea, sulla Terra, guarda l'orologio che Marco, sull'astronave, porta con sé, vedrà che il tempo trascorso (in questo caso tempo proprio perché misura l'intervallo di tempo tra due eventi che avvengo nello stesso posto) è:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{\text{c}^2}} = 2{,}9 \times 10^8\ \text{s}\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}95\ \text{c}}{\text{c}}\right)^2} = 8{,}9 \times 10^7\ \text{s} \tag{2.3}$$

Questo è il tempo trascorso per Marco ed è un tempo proprio perché l'evento della partenza e dell'arrivo avvengo, nel suo sistema di riferimento, nella stessa posizione.

2. Chi misura la distanza tra la Terra e Sirio dal sistema di riferimento della Terra vede sia il luogo di arrivo che di partenza fermi nel proprio sistema di riferimento: questa distanza è una lunghezza propria. Essa vale:

$$l_0 = 8{,}6\ \text{al} = 8{,}1 \times 10^{16}\ \text{m} \tag{2.4}$$

Marco invece, nel suo sistema di riferimento, è come se stesse fermo e vedesse sia il punto di partenza che il punto di arrivo muoversi alla velocità v= 0,95 c: la distanza da lui misurata non è una lunghezza propria. La distanza da lui percorsa la possiamo ricavare dalla definizione di velocità, considerando il tempo Δt_0 da lui misurato per arrivare a destinazione.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \tag{2.5}$$

$$l = \Delta x = v\Delta t = 0{,}95\,\mathrm{c} \cdot 8{,}9 \times 10^7\,\mathrm{s} = 2{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{2.6}$$

Osserviamo che la velocità relativa tra il sistema di riferimento di Marco e quello di Andrea non può che essere, in modulo, la stessa per entrambi.
Possiamo ricavare questa distanza anche considerando il fenomeno della contrazione delle lunghezze.

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}} = 8{,}1 \times 10^{16}\,\mathrm{m}\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}95\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2} = 2{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{2.7}$$

3. Infine, quando l'astronave giungerà alla meta, l'età di Andrea sarà:

$$t = 40\,\text{anni} + \Delta t = 49\,\text{anni} \tag{2.8}$$

Invece l'età di Marco:

$$t' = 40\,\text{anni} + \Delta t_0 = 43\,\text{anni} \tag{2.9}$$

Esercizio 2 *Una navicella spaziale viene inviata dalla Terra verso Giove; la navicella si muove con una velocità costante $v = 25\,\mathrm{km/s}$. Determina lo scarto temporale tra quanto indicato da un orologio a Terra, dopo un anno di viaggio, e quello posto sulla navicella.*

Abbiamo due eventi: la posizione della navicella alla partenza e quella dopo un anno. Il tempo Δt_0 trascorso sulla navicella (ancora incognito) è un tempo proprio: i due eventi avvengono, per questo sistema di riferimento, nella stessa posizione. Il tempo Δt trascorso sulla Terra è invece un tempo non proprio.

Tra i due tempi sussiste quindi la seguente relazione:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \tag{2.10}$$

Calcoliamo il fattore γ.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{25\,\mathrm{km/s}}{2{,}99 \times 10^5\,\mathrm{km/s}}\right)^2}} = 1{,}0000000035 \tag{2.11}$$

In questo risultato c'è tuttavia un problema: una usuale calcolatrice scientifica darà come risultato solo uno, non potendo gestire abbastanza cifre significative da mostrare le cifre finali del fattore qui calcolato.

Per risolvere questo problema, e quando le velocità sono molto inferiori a quelle della luce, possiamo utilizzare uno sviluppo in serie. Si può dimostrare che, se $x \ll 1$, vale con buona approssimazione la seguente relazione:

$$(1+x)^{\alpha} \simeq 1+\alpha x \tag{2.12}$$

Se applichiamo questa relazione al fattore gamma possiamo scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1+\frac{1}{2}\beta^2 \tag{2.13}$$

$$\gamma \simeq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{25\,\mathrm{km/s}}{2{,}99\times 10^5\,\mathrm{km/s}}\right)^2 = 1+0{,}0000000035 \tag{2.14}$$

Per cui, se un anno sono 31536000 s, lo scarto temporale Δt_x tra i due orologi è:

$$\Delta t_x = \Delta t - \Delta t_0 = \gamma \Delta t_0 - \Delta t_0 = \Delta t_0(\gamma - 1) = 31536000\,\mathrm{s}\,((1+0{,}0000000035)-1) = 0{,}11\,\mathrm{s} \tag{2.15}$$

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Esercizio 3 *Abbiamo due sistemi di riferimento inerziale O e O'. Gli assi coordinati e le origini dei due sistemi sono sovrapposti all'istante* $t = 0\,\mathrm{s}$. *Il secondo sistema si muove rispetto al primo con velocità* $v = 7{,}3 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$ *nel verso positivo dell'asse x.*

Trova in che punto dello spazio tempo è individuato nel sistema O' un evento che nel sistema O accade all'istante $t = 3\,\mathrm{min}$ *nel punto* $\vec{P} \equiv (45\,\mathrm{km}; 3\,\mathrm{km}; 2\,\mathrm{km})$.

Per la particolare orientazione reciproca dei due sistemi di riferimento possiamo utilizzare la forma più semplice delle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

dove:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.17}$$

Queste trasformazioni ci consentono di trovare le coordinate (t, x, y, z) di un evento nel sistema di riferimento O conoscendo le coordinate (t', x', y', z') dello stesso evento nel sistema di riferimento O'. Sostituiamo i dati:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{7{,}3 \times 10^7\,\mathrm{m/s}}{299792458\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} = 1{,}031 \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} x' &= 1{,}031 \cdot (45 \times 10^3\,\mathrm{m} - 7{,}3 \times 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot 180\,\mathrm{s}) = -1{,}35 \times 10^{10}\,\mathrm{m} \\ y' &= 3 \times 10^3\,\mathrm{m} \\ z' &= 2 \times 10^3\,\mathrm{m} \\ t' &= 1{,}031 \cdot \left(180\,\mathrm{s} - \frac{7{,}3 \times 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot 45 \times 10^3\,\mathrm{m}}{(299792458\,\mathrm{m/s})^2}\right) = 186\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Quindi, nel sistema di riferimento O', l'evento accade all'istante $t' = 186\,\mathrm{s}$, nel punto di coordinate spaziali $\vec{P}' \equiv (-1{,}35 \times 10^{10}\,\mathrm{m}; 3 \times 10^3\,\mathrm{m}; 2 \times 10^3\,\mathrm{m})$.

Esercizio 4 *Abbiamo due osservatori, O e O′: il primo sta sulla Terra e il secondo si muove su un'astronave verso una stazione spaziale che dista 2 anni luce dalla Terra, procedendo alla velocità* $v = 0{,}50\,\mathrm{c}$. *Quando l'astronave parte per il suo viaggio i due osservatori si trovano nello stesso istante sulla Terra.*

1. *Trova i punti dello spazio-tempo, per i due osservatori, in cui inizia il viaggio.*
2. *Trova i punti dello spazio-tempo, per i due osservatori, in cui il viaggio termina.*
3. *Trova la durata del viaggio che ognuno dei due osservatori misura nel proprio sistema di riferimento, indicando quale delle due durate può interpretarsi come un tempo proprio.*
4. *Trova la lunghezza del viaggio che ognuno dei due osservatori misura nel proprio sistema di riferimento, indicando quale delle due può interpretarsi come lunghezza propria.*

Il testo ci dice che nell'istante iniziale il tempo è lo stesso per i due osservatori: poniamolo, a nostro arbitrio e per semplicità, uguale a zero.

$$t_1 = t'_1 = 0\,\mathrm{s} \tag{2.20}$$

Supponiamo che il moto avvenga in linea retta, a velocità costante. Se vale questa ipotesi possiamo considerare il sistema di riferimento della Terra e dell'astronave come inerziali e possiamo applicare le trasformazioni di Lorentz. Se il moto fosse differente quasi sicuramente dovremmo usare un modello molto più sofisticato, magari la relatività generale.

Per quanto riguarda l'orientazione spaziale poniamo l'asse x nella direzione della traiettoria del moto e con il verso positivo concorde con il verso della velocità dell'astronave. Gli assi y e z sono di conseguenza perpendicolari al moto e per essi non si osservano fenomeni relativistici: gli escludiamo dalla discussione.

Adesso possiamo fissare la posizione iniziale del viaggio nei due sistemi di riferimento in una coordinata qualsiasi dell'asse x: poniamola, a nostro arbitrio e per semplicità, uguale a zero per entrambe i sistemi. Come per il tempo esse sono definite a meno di una costante arbitraria.

$$x_1 = x'_1 = 0\,\mathrm{m} \tag{2.21}$$

1. Ora possiamo dire che la posizione iniziale nei due sistemi di riferimento inerziale è:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 \equiv (0\,\mathrm{m}; 0\,\mathrm{s}) \tag{2.22}$$

2. Per quanto costruito e conosciuto finora, tra i nostri sistemi di riferimento possiamo applicare le seguenti trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{\mathrm{c}^2}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Per quanto riguarda il sistema di riferimento O, il punto di arrivo è a due anni luce dal punto di partenza, quindi:

$$x_2 = 2\,\mathrm{al} = 1{,}8908 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{2.24}$$

Il tempo trascorso può essere ricavato dalla definizione di velocità.

$$v = \frac{\Delta x_0}{\Delta t} \tag{2.25}$$

dove v è la velocità dell'astronave, Δx_0 la distanza tra la Terra e la stazioni spaziale, misurata stando fermi sulla Terra, e Δt il tempo trascorso.

$$t_2 = t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta x_0}{v} = \frac{2\,\mathrm{al}}{0{,}5\,\mathrm{c}} = 4{,}0\,\mathrm{anni} = 1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{2.26}$$

Quindi:

$$\vec{P_2} \equiv (x_2; t_2) = (2\,\mathrm{al}; 4\,\mathrm{a}) = (1{,}8908 \times 10^{16}\,\mathrm{m}; 1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s}) \tag{2.27}$$

Per il sistema di riferimento O' sostituiamo quanto sappiamo nelle trasformazioni:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\mathrm{c}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}5\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 1{,}1547 \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} x'_2 &= 1{,}1547 \cdot (2\,\mathrm{al} - 0{,}5\,\mathrm{c} \cdot 4\,\mathrm{a}) = 0\,\mathrm{al} = 0\,\mathrm{m} \\ t'_2 &= 1{,}1547 \cdot \left(4\,\mathrm{a} - \frac{0{,}5\,\mathrm{c} \cdot 2\,\mathrm{al}}{\mathrm{c}^2}\right) = 3{,}45\,\mathrm{a} = 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Il punto di arrivo nel sistema di riferimento O' è:

$$\vec{P'_2} \equiv (x'_2; t'_2) = (0\,\mathrm{m}; 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s}) \tag{2.30}$$

3. Per il sistema di riferimento O, come abbiamo già calcolato, il viaggio dura:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2 = 1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{2.31}$$

Per il sistema di riferimento O' il viaggio dura:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t'_2 = 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} \tag{2.32}$$

La durata del viaggio per il sistema di riferimento O' è un tempo proprio. Tra le due durate deve sussistere anche la relazione:

$$\Delta t' = \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{2.33}$$

Infatti:

$$\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1{,}2614 \times 10^8\,\mathrm{s}}{1{,}1547} = 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} = \Delta t' \tag{2.34}$$

4. Per il sistema di riferimento O la lunghezza del viaggio L, come sappiamo dal testo, è 2 al. La posizione di arrivo e di partenza sono misurabili nello stesso istante dallo stesso sistema di riferimento: abbiamo una lunghezza propria.
Per il sistema di riferimento O' la lunghezza L' *non é* $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Infatti, oltre ad essere nulla, quella lunghezza è tra due eventi che per O' non avvengono nello stesso istante. Allora la lunghezza è ad esempio la distanza tra il punto di partenza e il traguardo visti entrambi al momento della partenza.
Se il moto è rettilineo uniforme il traguardo si trova ad una distanza che è il prodotto della velocità del viaggio per il tempo che esso dura.

$$L' = v \cdot t'_2 = 0{,}5\,\mathrm{c} \cdot 1{,}0925 \times 10^8\,\mathrm{s} = 1{,}64 \times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{2.35}$$

Avvertenze

In una precedente versione di questo file, nel calcolare la posizione x_2' non ho svolto dei calcoli esatti, come scritto sopra, ma dei calcoli numerici, peraltro con più cifre significative di quelle che sarebbe opportuno scrivere.

$$x_2{}' = 1{,}1547 \cdot (1{,}8908 \times 10^{16}\,\mathrm{m} - 1{,}4989 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s} \cdot 1{,}2614 \times 10^{8}\,\mathrm{s}) = 1{,}0108 \times 10^{12}\,\mathrm{m} \quad (2.36)$$

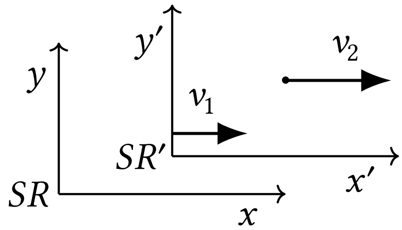
Cosa c'è di sbagliato in un risultato così diverso da quello corretto? Il problema è che il risultato non è formalmente scorretto. Con cinque cifre significative ci possiamo aspettare che il risultato abbia una approssimazione del $0,01\%$ e infatti è così. Il rapporto tra la distanza ottenuta e la lunghezza L è dello $0,005\%$, ovvero è uno zero entro i limiti di precisione dei calcoli. Questo risultato è inoltre molto sensibile al numero di cifre usato per svolgere il calcolo: con alcune calcolatrici, preservando tutta la precisione matematica nei calcoli precedenti, ho ottenuto come risultato $2{,}7 \times 10^4$ m. Tuttavia non vediamo nessun particolare significato in quei numeri, ma ritroviamo tutta la fisica che dobbiamo aspettarci solo nel risultato nullo. Per cui vi invito in relatività a prestare ancora più attenzione del solito nello svolgere calcoli approssimati invece di quelli esatti, se questi sono possibili, e al numero di cifre utilizzate anche nei passaggi intermedi.

2.3 Composizione delle velocità

Esercizio 5 *L'astronave Arcadia si allontana ad una velocità* $v_1 = 0{,}60\,\mathrm{c}$ *rispetto alla Terra. Poi lancia un missile con una velocità* $v_2 = 0{,}90\,\mathrm{c}$ *rispetto ad essa, davanti a sé.*

Trova la velocità relativa del missile rispetto alla Terra.

In mancanza di specifiche indicazioni supponiamo che il movimento del missile e dell'astronave avvengano tutti sulla stessa retta. A nostro arbitrio e come scelta puramente formale supponiamo che il movimento avvenga sull'asse x: un'altra scelta potrebbe in questo caso cambiare i calcoli, ma non la fisica. Se valgono queste premesse chiamiamo SR il sistema di riferimento della Terra e chiamiamo SR' il sistema di riferimento dell'astronave. L'astronave e il suo sistema di rifermento hanno la stessa velocità e si muovono nel verso positivo dell'asse x. I due sistemi di riferimento hanno gli assi paralleli. Possiamo rappresentare quanto detto con questa figura:



La composizione classica delle velocità prevede che in questo caso le velocità relative si sommino direttamente. Non è così in relatività. Se chiamiamo v_1 la velocità del secondo sistema di riferimento rispetto al primo (la velocità dell'astronave) e v_2 la velocità di un oggetto rispetto a quest'ultimo riferimento (la velocità del missile) allora questo oggetto ha una velocità v_T rispetto al primo sistema di riferimento (la Terra), secondo questa relazione:

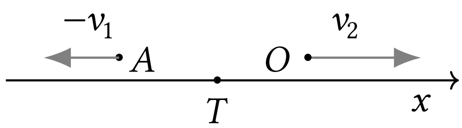
$$v_T = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 \cdot v_2}{\mathrm{c}^2}} = \frac{0{,}6\,\mathrm{c} + 0{,}8\,\mathrm{c}}{1 + \dfrac{0{,}6\,\mathrm{c} \cdot 0{,}8\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}^2}} = 0{,}95\,\mathrm{c} \tag{2.37}$$

Osserviamo che nella precedente relazione le velocità sono prese con segno positivo se concordi con il verso positivo dell'asse x (come in questo caso) o con segno negativo altrimenti.

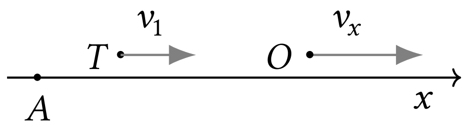
Esercizio 6 *L'astronave Arcadia e la Orion si allontanano in direzioni opposte dalla base spaziale Beta. La stazione spaziale riferisce che la prima astronave si allontana alla velocità* $v_1 = 0{,}60\,\mathrm{c}$ *e la seconda con velocità* $v_2 = 0{,}40\,\mathrm{c}$.

Con quale velocità l'Orion si sta allontanando dall'Arcadia?

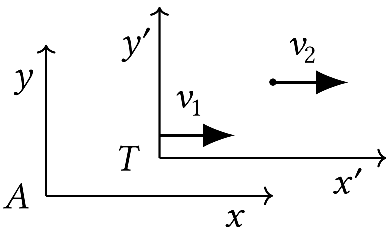
Il testo ci dice che il moto delle astronavi avviene nella stessa direzione: rappresentiamo il moto tutto sull'asse x. La velocità dell'Arcadia è indicata con il meno davanti perché è in verso opposto al verso positivo dell'asse x.



Dal punto di vista dell'Arcadia, la Terra si allontana da essa con velocità v_1 (le velocità reciproche di due oggetti sono sempre le stesse), ma in verso opposto. L'Orion si allontana dall'Arcadia con la velocità incognita v_x.



Questa rappresentazione è del tutto corrispondente a quella descritta nell'esercizio precedente, dove il sistema di riferimento SR è quello dell'Arcadia e SR' è quello della Terra.



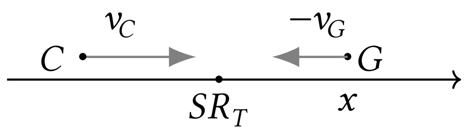
Concludendo:

$$v_x = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 \cdot v_2}{\mathrm{c}^2}} = \frac{0{,}6\,\mathrm{c} + 0{,}9\,\mathrm{c}}{1 + \dfrac{0{,}6\,\mathrm{c} \cdot 0{,}9\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}^2}} = 0{,}97\,\mathrm{c} \tag{2.38}$$

Esercizio 7 *L'astronave Cavour, se vista dalla Terra, percorre* 18×10^7 km *in* $8{,}2 \times 10^2$ s, *allontanandosi da essa. L'astronave Garibaldi é in viaggio verso la Terra alla velocità* $v_G = 0{,}60\,\mathrm{c}$ *nella stessa direzione.*

1. *Trova la velocità della Cavour se vista dalla Terra.*
2. *Trova la velocità della Cavour se vista dalla Garibaldi.*
3. *Trova la distanza percorsa e il tempo impiegato dalla Cavour se vista dalla Garibaldi.*

Chiamiamo SR_T il sistema di riferimento della Terra, SR_C quello della Cavour e SR_G quello della Garibaldi. Il moto avviene tutto in un unica dimensione. Rappresentiamo quanto illustrato dal testo immaginando la Cavour che si muove nel verso positivo dell'asse x e la Garibaldi nel verso negativo se viste da SR_T.

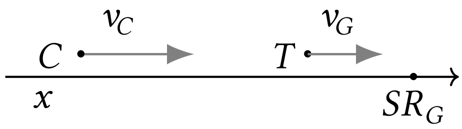


1. La velocità della Cavour vista dalla Terra è semplicemente il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato: sia questo spazio che questo tempo sono entrambi misurati dal sistema di riferimento della Terra.

$$v_C = \frac{x}{t} = \frac{\Delta x_0}{\Delta t} = \frac{18 \times 10^{10}\ \mathrm{m}}{8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s}} = 2{,}20 \times 10^8\ \mathrm{m/s} = 0{,}732\,\mathrm{c} \tag{2.39}$$

La distanza vista dalla Terra può essere considerata una lunghezza propria: possiamo mettere un regolo fisso che va dalla posizione di partenza della Cavour fino al punto di arrivo. Il tempo trascorso non è un tempo proprio: si riferisce a due eventi che non avvengono nello stesso luogo.

2. Dal testo constatiamo che la Cavour e la Garibaldi si muovono l'una incontro all'altra nella stessa direzione. La loro velocità relativa è legata alla somma delle loro velocità rispetto alla Terra. Rappresentiamo quel che si vede da SR_G.



Per cui la velocità v_{CG} della Cavour vista dalla Garibaldi è:

$$v_{CG} = \frac{v_C + v_G}{1 + \frac{v_C \cdot v_G}{\mathrm{c}^2}} = \frac{0{,}732\ \mathrm{c} + 0{,}6\ \mathrm{c}}{1 + \frac{0{,}732\ \mathrm{c} \cdot 0{,}6\ \mathrm{c}}{\mathrm{c}^2}} = 0{,}926\ \mathrm{c} \tag{2.40}$$

3. Per rispondere alla terza domanda usiamo due metodi distinti.

Primo metodo
Non possiamo applicare direttamente le formule relative alla contrazione delle lunghezze e alla dilatazione dei tempi perché queste si possono applicare solo se in uno dei due sistemi la lunghezza o l'intervallo di tempo misurati sono propri.
In particolare il tempo misurato dalla Terra e quello misurato dalla Garibaldi non sono propri entrambi: non possiamo stabilire una relazione diretta tra i due intervalli di tempo.
Il tempo misurato sulla Cavour è invece un tempo proprio. Scriviamo una relazione tra il tempo misurato sulla Terra e quello misurato sulla Cavour ricavando quest'ultimo.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_C}{\mathrm{c}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}732\ \mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 1{,}47 \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \Delta t_T &= \gamma_1 \Delta t_{0\,C} \\ \Delta t_{0\,C} &= \frac{\Delta t_T}{\gamma_1} = \frac{8{,}2 \times 10^2\ \mathrm{s}}{1{,}47} = 5{,}58 \times 10^2\ \mathrm{s} \end{aligned} \tag{2.42}$$

L'intervallo di tempo misurato sulla Garibaldi, che non è un tempo proprio, può a sua volta essere legato al tempo misurato sulla Cavour, utilizzando la loro velocità relativa che abbiamo prima ricavato.

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{CG}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}926\ \mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 2{,}65 \tag{2.43}$$

$$\Delta t_G = \gamma_2 \Delta t_{0\,C} = 2{,}65 \cdot 5{,}58 \times 10^2\ \mathrm{s} = 1{,}48 \times 10^3\ \mathrm{s} \tag{2.44}$$

Per ricavare la lunghezza misurata dalla Garibaldi possiamo applicare la definizione di velocità.

$$\begin{aligned} v_{CG} &= \frac{\Delta x_G}{\Delta t_G} \\ \Delta x_G &= v_{CG} \cdot \Delta t_G = 0{,}926\,\mathrm{c} \cdot 1{,}48 \times 10^3\,\mathrm{s} = 4{,}11 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Osserviamo che per ricavare questa lunghezza *non avremo potuto usare* le usuali formule relative alla contrazione delle lunghezze. Infatti nel nostro caso la lunghezza misurata dalla Terra può essere considerata una lunghezza propria in quanto la posizione di partenza e di arrivo possono essere misurate allo stesso istante: possiamo quindi trovare la lunghezza contratta misurata dalla Cavour. Una volta conosciuta questa però non possiamo fare nessuna trasformazione dello stesso tipo per sapere quale distanza misura la Garibaldi. Non possiamo fare neanche una trasformazione diretta tra la distanza misurata dalla Terra e quella misurata dalla Garibaldi.

Secondo metodo

Possiamo ottenere gli stessi risultati in maniera più diretta facendo uso delle trasformazioni di Lorentz. Per poterle utilizzare supponiamo a nostro arbitrio, senza che questo modifichi la fisica del problema, che i tre sistemi di riferimento abbiamo l'origine degli assi coincidenti all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$, dove t è specifico per ogni sistema. In particolare definiamo le coordinate senza apice quelle misurate nel SR_T e le coordinate con apice quelle misurate nel SR_G.

La posizione iniziale è quindi per tutti alla coordinata $x_1 = x_1' = 0\,\mathrm{m}$ all'istante $t_1 = t_1' = 0\,\mathrm{s}$

La distanza misurata da SR_T è:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 18 \times 10^{10}\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} = 18 \times 10^{10}\,\mathrm{m} \tag{2.46}$$

Considerando che:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_G}{\mathrm{c}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}6\,\mathrm{c}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 1{,}25 \tag{2.47}$$

Allora la posizione finale misurata da SR_G è:

$$x_2' = \gamma(x_2 - v_G\, t_2) = 1{,}25 \cdot (18 \times 10^{10}\,\mathrm{m} - (-0{,}6\,\mathrm{c}) \cdot 8{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s}) = 4{,}09 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{2.48}$$

La velocità della Garibaldi è negativa perché da Terra si muove verso sinistra nel verso negativo dell'asse x. Il valore è differente rispetto a quello calcolato col primo metodo per il maggior arrotondamento svolto nel passaggi precedenti.

La distanza misurata da SR_G è:

$$\boldsymbol{\Delta x_G} = \Delta x' = x_2' - x_1' = 4{,}09 \times 10^{11}\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} = 4{,}09 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \tag{2.49}$$

Analogamente il tempo trascorso misurata da SR_T è:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 8{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s} = 8{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s} \tag{2.50}$$

L'istante finale misurato da SR_G è:

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v_G \cdot x_2}{\mathrm{c}^2}\right) = 1{,}25 \cdot \left(8{,}2 \times 10^2\,\mathrm{s} - \frac{(-0{,}6\,\mathrm{c}) \cdot 18 \times 10^{10}\,\mathrm{m}}{\mathrm{c}^2}\right) = 1{,}48 \times 10^3\,\mathrm{s} \tag{2.51}$$

L'intervallo di tempo misurato da SR_G è:

$$\boldsymbol{\Delta t_G} = \Delta t' = t_2' - t_1' = 1{,}48 \times 10^3\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s} = 1{,}48 \times 10^3\,\mathrm{s} \tag{2.52}$$

2.4 Quantità di moto

Esercizio 8 *Due particelle, di massa* $m_1 = 2{,}37\times10^{-30}$ kg *e* $m_2 = 8{,}26\times10^{-31}$ kg, *si muovono l'una verso l'altra, verso uno stesso osservatore, nella medesima direzione, rispettivamente con velocità* $v_1 = 0{,}80$ c *e* $v_2 = 0{,}60$ c. *Le particelle si urtano in maniera completamente anelastica.*

Trova la velocità finale delle due particelle dopo l'urto.

Anche in relatività la quantità di moto totale di un sistema si conserva se il sistema non è soggetto a forze esterne. Se consideriamo che i due corpi rimangono uniti con una stessa velocità dopo l'urto possiamo scrivere:

$$p_1 + p_2 = p_f \tag{2.53}$$

Calcoliamo le quantità di moto iniziali delle due particelle.

$$p_1 = \gamma m_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}mv = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}}\cdot 2{,}37\times10^{-30}\,\text{kg}\cdot 0{,}8\,\text{c} = 9{,}47\times10^{-22}\,\text{kg m s}^{-1} \tag{2.54}$$

$$p_2 = \gamma m_2 v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}mv = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}6)^2}}\cdot 8{,}26\times10^{-31}\,\text{kg}\cdot 0{,}6\,\text{c} = 1{,}86\times10^{-22}\,\text{kg m s}^{-1} \tag{2.55}$$

Osserviamo che le particelle procedono nella stessa direzione, ma in verso opposto: una delle due quantità di moto (a nostro arbitrio) ha segno negativo.

$$p_f = \gamma m_{tot} v_f = p_1 + (-p_2) = 7{,}62\times10^{-22}\,\text{kg m s}^{-1} \tag{2.56}$$

$$m_{tot} = 2{,}37\times10^{-30}\,\text{kg} + 8{,}26\times10^{-31}\,\text{kg} = 3{,}20\times10^{-30}\,\text{kg} \tag{2.57}$$

Ricaviamo v_f da questa equazione, dove è l'unica incognita.

$$\frac{p_f}{m_{tot}} = \gamma v_f = \frac{v_f}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}}$$

$$\frac{p_f^2}{m_{tot}^2} = \frac{v_f^2}{1-\frac{v_f^2}{c^2}} = \frac{v_f^2}{\frac{c^2-v_f^2}{c^2}} = \frac{v_f^2c^2}{c^2-v_f^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p_f^2}{m_{tot}^2} - \frac{v_f^2c^2}{c^2-v_f^2} &= 0\\
\frac{p_f^2(c^2-v_f^2) - v_f^2c^2m_{tot}^2}{(c^2-v_f^2)m_{tot}^2} &= 0\\
p_f^2c^2 - p_f^2v_f^2 - m_{tot}^2v_f^2c^2 &= 0\\
p_f^2c^2 &= v_f^2(p_f^2 + m_{tot}^2c^2)\\
v_f &= \sqrt{\frac{p_f^2c^2}{p_f^2+m_{tot}^2c^2}}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Infine:

$$v_f = \sqrt{\frac{(7{,}62 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}})^2 \cdot v^2}{(7{,}62 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}})^2 + \mathrm{c}^2 \cdot (3{,}20 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg})^2}} = 1{,}86 \times 10^8\,\mathrm{m/s} = 0{,}62\,\mathrm{c} \qquad (2.59)$$

2.5 Energia

Esercizio 9 *Trova l'energia a riposo, l'energia cinetica e quella totale di un muone che si muove alla velocità* $v = 0{,}70\,\mathrm{c}$. *[massa muone* $m_\mu = 105{,}7\,\mathrm{MeV/c^2}$*]*

In fisica nucleare e delle particelle è molto frequente usare queste unità di misura alternative per l'energia, la quantità di moto e la massa. In particolare la massa è spesso indicata in $\mathrm{MeV/c^2}$ dove $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

L'energia a riposo E_0 di un oggetto di massa m in relatività vale:

$$E_0 = m\mathrm{c}^2 \qquad (2.60)$$

Per cui:

$$m = \frac{E_0}{\mathrm{c}^2} \qquad (2.61)$$

che ha la stessa forma dell'unità di misura qui usata per la massa del muone.

Per cui, nel nostro caso:

$$E_0 = (105{,}7\,\mathrm{MeV/c^2}) \cdot \mathrm{c}^2 = 105{,}7\,\mathrm{MeV} = 105{,}7 \times 10^6 \cdot 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1{,}693 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \qquad (2.62)$$

L'energia cinetica E_c è definita come:

$$E_c = (\gamma - 1)m\mathrm{c}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{\mathrm{c}^2}}} - 1\right)E_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}7)^2}} - 1\right) \cdot 1{,}693 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} = 6{,}778 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} \qquad (2.63)$$

L'energia totale è la somma dell'energia a riposo con l'energia cinetica:

$$E_{tot} = E_0 + E_c = \gamma m\mathrm{c}^2 = 2{,}371 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \qquad (2.64)$$

Esercizio 10 *Una particella di massa* $m = 205\,\mathrm{MeV/c^2}$ *viene inviata su un rilevatore di particelle.*

Il rilevatore ci dice che la quantità di moto della particella vale $p = 365\,\mathrm{MeV/c}$.

Determina l'energia totale e la velocità della particella, nell'unità di misura data e nel SI.

La relazione relativistica tra energia totale, massa e quantità di moto è questa:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{2.65}$$

In questo caso:

$$\begin{gathered} E = \sqrt{\left(205\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\right)^2 \mathrm{c}^4 + \left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 \mathrm{c}^2} = \\ \sqrt{(205\,\mathrm{MeV})^2 + (365\,\mathrm{MeV})^2} = 419\,\mathrm{MeV} = 6{,}71 \times 10^{-11}\,\mathrm{J} \end{gathered} \tag{2.66}$$

Dalla relazione:

$$p = mv\gamma \tag{2.67}$$

procediamo come nell'esercizio 8 e scriviamo direttamente:

$$v_f = \sqrt{\frac{p_f^2 \mathrm{c}^2}{p_f^2 + m_{tot}^2 \mathrm{c}^2}} \tag{2.68}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{\left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 \mathrm{c}^2}{\left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 + \left(205\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\right)^2 \mathrm{c}^2}} = \sqrt{\frac{(365\,\mathrm{MeV})^2}{\left(365\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2 + \left(205\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}\right)^2}} = 0{,}87\,\mathrm{c} = 2{,}61 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \tag{2.69}$$

Indice analitico