Appunti minimi di fisica

Massimiliano Virdis

Indice

1 Grandezze fondamentali

- **Grandezza fisica**: proprietà di un fenomeno, corpo o sostanza che può essere espressa quantitativamente mediante un numero e un riferimento.
- **Campione di misura**: realizzazione della definizione di una grandezza, con un valore stabilito e con un'incertezza di misura associata, impiegata come riferimento.
- **Unità di misura**: grandezza scalare reale, definita e adottata per convenzione, rispetto alla quale è possibile confrontare ogni altra grandezza della stessa specie al fine di esprimere il rapporto delle due grandezze come un numero.
- **Lunghezza**: estensione di un corpo; distanza tra due punti; length is any quantity with dimension distance.
- **Chilogrammo**: Il chilogrammo è quella massa che subisce una accelerazione di 2×10^{-8} m/s^2 se soggetta alla forza che si sviluppa tra due conduttori retti, paralleli, di lunghezza infinita e sezione circolare trascurabile, posti nel vuoto alla distanza di un metro, attraverso cui scorre una corrente elettrica costante di $6{,}24150962915265 \times 10^{18}$ cariche elementari (ovvero 1 coulomb) al secondo.
- **Metro**: il metro venne ridefinito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299792458 di secondo. Secondo: la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini, da (F=4, MF=0) a (F=3, MF=0), dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133.

Parte I

Meccanica

2 Cinematica

La **velocità** media è il rapporto tra lo spostamento effettuato e l'intervallo di tempo trascorso.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} \tag{2.1}$$

Velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.2}$$

La **accelerazione** media è il rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo trascorso.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \tag{2.3}$$

Accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

2.1 Moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned} &x(t) = x_0 + v \cdot t \quad \text{(retta)} \\ &v(t) = cost. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 Moto uniformemente accelerato

$$\begin{aligned} &x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{(parabola con asse verticale)} \\ &v(t) = v_0 + a \cdot t \quad \text{(retta)} \\ &a(t) = cost. \\ &{v_f}^2 = {v_i}^2 + 2ax \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Moto circolare uniforme

Moto di un corpo che si muove su una circonferenza con velocità costante (in modulo).

La velocità è sempre tangente alla traiettoria. L'accelerazione (centripeta) è diretta verso il centro della circonferenza.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T}; \qquad T = \frac{1}{f} \\ v &= \frac{2\pi r}{T} = \omega r \\ a &= \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.4 Moto armonico

Abbiamo un corpo che si muove su una circonferenza di raggio A con velocità angolare costante ω. Proiettiamo la sua posizione su un diametro qualsiasi della circonferenza. Il moto risultante è un moto armonico.

Se il corpo si trova nella posizione $x = A$ all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ allora le leggi del moto sono:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ v(t) &= -A\omega\sin(\omega t) \\ a(t) &= -A\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Se la posizione iniziale del corpo è ad un valore intermedio tra A e $-A$ allora l'argomento delle funzioni goniometriche diventa $\omega t + \phi$, dove ϕ è un angolo opportuno.

Le leggi del moto si possono esprimere anche partendo dalla funzione seno: in quel caso la posizione iniziale corrisponde a $x = 0\,\mathrm{m}$.

Quale che sia la forma scelta per la legge del moto (coseno o seno) vale sempre la seguente relazione:

$$a = -\omega^2 x \tag{2.9}$$

3 Principi della dinamica

1. Un corpo non soggetto a forze persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

   oppure

   Un corpo non soggetto a forze se è fermo rimane fermo, se si muove continua a muoversi di moto rettilineo uniforme
2. Un corpo di massa m su cui agisce la forza $\vec{F}$ accelera con:

   $$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{3.1}$$

3. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

   oppure

   Se un corpo A esercita una forza su corpo B allora il corpo B esercita una forza uguale ed opposta su A.

4 Lavoro

Il **lavoro di una forza** $\vec{F}$ costante che sposta il suo punto di applicazione di un tratto $\Delta\vec{s}$ vale:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = |\vec{F}||\Delta\vec{s}|\cos(\alpha) \tag{4.1}$$

dove α è l'angolo tra i due vettori. L'unità di misura del lavoro è il joule (J).

Se la forza non è costante o il tratto non è rettilineo bisogna dividere lo spostamento in tanti piccoli tratti per ognuno dei quali la forza sia costante e lo spostamento rettilineo, e poi sommare i lavori elementari così ottenuti:

$$L = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{4.2}$$

4.1 Energia potenziale

Una forza è detta *conservativa* se il lavoro che essa compie quando spostiamo il suo punto di applicazione da un punto A ad un punto B non dipende dal percorso scelto, ma solo da i punti iniziale e finale. Oppure possiamo dire che una forza è conservativa se il lavoro che essa compie quando spostiamo il suo punto di applicazione lungo tutto un percorso chiuso è zero.

Se una forza è conservativa possiamo associare al lavoro da essa compiuto una grandezza detta energia potenziale.

La variazione di **energia potenziale** tra un punto A e un punto B è uguale al lavoro cambiato di segno che le forze del campo devono compiere se spostiamo il loro punto di applicazione dal punto A al punto B:

$$\begin{gathered} \Delta U_{AB} = -L_{AB} \\ U_A - U_B = L_{AB} = L_B - L_A \end{gathered} \tag{4.3}$$

L'energia potenziale in un punto è definita a meno di una costante arbitraria. Il significato fisico è associato alla sua variazione secondo la precedente definizione.

Infine l'energia potenziale è una grandezza caratteristica di un sistema più che del singolo corpo, come si osserva anche negli esempi successivi

Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale di corpo di massa m, posto ad altezza h rispetto a qualsiasi altitudine di riferimento, in prossimità della superficie terrestre vale:

$$U = mgh \tag{4.4}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Questa energia potenziale è propriamente del sistema corpo-Terra: il contributo della Terra è inglobato nel valore di g.

Se non siamo in prossimità della superficie terrestre, o più in generale tra due corpi puntiformi di massa m e M, la cui distanza reciproca è d allora l'energia potenziale gravitazionale vale:

$$U = -\frac{GmM}{d} \tag{4.5}$$

dove G è la costante di gravitazione universale dei corpi.

Energia potenziale elastica

L'energia potenziale elastica di una molla con costante elastica k e allungamento x vale:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.6}$$

Anche in questo caso abbiamo propriamente un sistema costituito dall'insieme di atomi che costituiscono la molla.

4.2 Energia cinetica

L'**energia cinetica** di un corpo di massa m e velocità v è il lavoro che dovremmo fare per fare accelerare il corpo da fermo a quella velocità:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.7}$$

4.3 Teorema dell'energia cinetica

Il lavoro di *tutte* le forze che agiscono su un corpo di massa m è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo.

$$L = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{1}{2}m{v_i}^2 \tag{4.8}$$

Il teorema vale per qualsiasi tipo di forza agisca sul corpo. La definizione di energia cinetica deriva dal teorema dell'energia cinetica.

4.4 Principio (o teorema) di conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica di un sistema è la somma dell'energia potenziale del sistema più l'energia cinetica di tutti i suoi componenti:

$$E_m = U + E_c \tag{4.9}$$

Se sul sistema compiono lavoro solo forze conservative allora l'energia meccanica si conserva.

In particolare se nessuna forza non conservativa (come l'attrito) compie lavoro sul sistema allora l'energia si conserva.

5 Quantità di moto

Quantità di moto di un corpo puntiforme di massa m e velocità $\vec{v}$:

$$q = m\vec{v} \tag{5.1}$$

5.1 Principio di conservazione della quantità di moto

Un corpo non soggetto a forze esterne conserva la sua quantità di moto.

oppure

In un sistema isolato (non soggetto a forze esterne) la quantità di moto totale si conserva.

5.2 II principio della dinamica e quantità di moto

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{5.2}$$

6 Onde ed oscillazioni

6.1 Moto di una molla elastica

Se una molla segue la legge di Hooke ($F = -kx$) allora può muoversi di moto armonico:

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad\qquad a = -\omega^2 x \tag{6.1}$$

Il moto ha velocità angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \tag{6.2}$$

6.2 Pendolo semplice

Se un pendolo semplice (una massa puntiforme attaccata ad un filo inestensibile di lunghezza L e di massa trascurabile) compie oscillazioni sufficientemente piccole allora può muoversi di moto armonico:

$$a = -\frac{g}{L}\sin(\alpha) \simeq -\frac{g}{L}x \qquad\qquad a = -\omega^2 x \tag{6.3}$$

Il moto ha velocità angolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T} \tag{6.4}$$

e periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{6.5}$$

Parte II

Elettromagnetismo

7 Elettrostatica

Chiamiamo *Elettromagnetismo* l'insieme dei fenomeni elettrici e magnetici.

Chiamiamo *Elettrodinamica classica* la teoria fondamentale che interpreta questi fenomeni.

Nell'ambito dell'elettrodinamica possiamo considerarne una sezione più ristretta detta *Elettrostatica*, relativa a cariche stazionarie e in equilibrio.

Alla base dell'elettrostatica c'è il fatto che la materia può avere una proprietà chiamata carica elettrica che può assumere due forme: positiva e negativa.

7.1 Forza di Coulomb

Due cariche (due oggetti portatori di carica) esercitano l'una su l'altra una forza quantificata dalla *legge di Coulomb*:

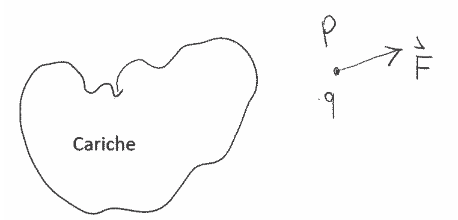
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{7.1}$$

La forza è sempre su un oggetto. In questo caso una carica esercita su l'altra una forza, quantificata dalla legge di Coulomb. Le forze sulle due cariche sono uguali e contrarie in conformità al terzo principio della dinamica.

7.2 Campo elettrico

Abbiamo una distribuzione di cariche. Consideriamo un punto P fuori di essa. In quel punto mettiamo una piccola carica detta carica di prova.

Chiamiamo *campo elettrico* in un punto P dello spazio, di una data distribuzione di cariche, il rapporto tra la forza che la distribuzione esercita su una carica di prova q posta in quel punto e la carica stessa, quando questa tende a zero in valore e dimensione:



$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q} \tag{7.2}$$

Mentre la forza agisce sempre su una carica ovvero su un oggetto, invece il campo può agire su un qualunque punto dello spazio.

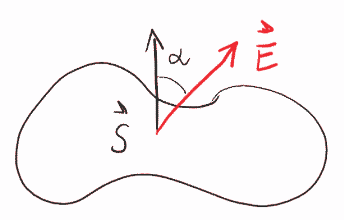
7.3 Teorema di Gauss per elettrostatica

Il flusso del campo elettrico *attraverso* una superficie chiusa è uguale al rapporto tra la somma algebrica delle cariche contenute *all'interno* della superficie e la costante dielettrica del vuoto:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \tag{7.3}$$

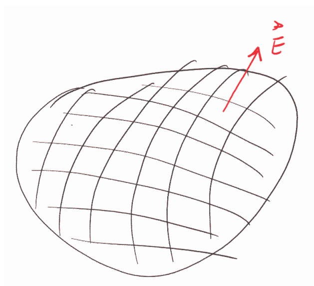
Dalla forma matematica della forza di Coulomb deriva la validità del teorema di Gauss e se il campo elettrico soddisfa la legge di Gauss automaticamente deve esserci una forza che segue la legge di Coulomb.

Il flusso elementare di un campo uniforme $\vec{E}$ attraverso una superficie *piana* e orientata $\vec{S}$ è il prodotto scalare del campo per la superficie.

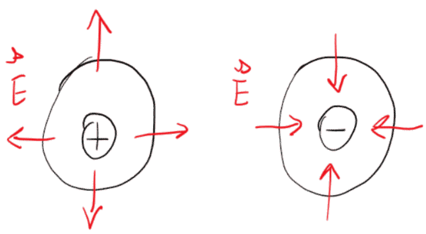


$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES\cos(\alpha) \tag{7.4}$$

Se la superficie non è piana, come nel teorema di Gauss, allora possiamo suddividere la superficie in innumerevoli superfici, ognuna delle quali pressoché piana, e calcolare il flusso totale come somma dei flussi attraverso ciascuna superficie piana. Se le superfici piane sono infinitesime possiamo fare un'integrale esteso a tutta la superficie (il cerchio nel simbolo di integrale significa questo).



Il risultato del teorema di Gauss è legato alla *forma delle linee di campo elettrico di un carica elettrica*: queste linee sono sempre aperte e uscenti dalla carica se è positiva o entranti se negativa. Di conseguenza il flusso del campo, se racchiudiamo una carica con una superficie chiusa, è diverso da zero e proporzionale alla carica stessa.



7.4 Energia potenziale

Forze conservative. Una forza è detta *conservativa* se il lavoro che essa compie quando spostiamo il suo punto di applicazione da un punto A ad un punto B non dipende dal percorso scelto, ma solo da i punti iniziale e finale. *Oppure* possiamo dire che una forza è conservativa se il lavoro che essa compie quando spostiamo il suo punto di applicazione lungo tutto un percorso chiuso è zero.

La forza elettrostatica è una forza conservativa.

Se una forza è conservativa possiamo associare al lavoro da essa compiuto una grandezza detta energia potenziale.

La variazione di **energia potenziale** tra un punto A e un punto B è uguale al lavoro cambiato di segno che le forze del campo devono compiere se spostiamo il loro punto di applicazione dal punto A al punto B: $\Delta U_{AB} = -L_{AB}$.

L'energia potenziale in un punto è definita a meno di una costante arbitraria. Il significato fisico è associato alla sua variazione secondo la precedente definizione.

Date *due cariche puntiformi* possiamo associare al sistema delle due cariche un'*energia potenziale* che vale:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{7.5}$$

Essa rappresenta il lavoro che le forze del campo che agisce sulle due cariche dovrebbero compiere se spostassimo le cariche stesse dalla loro posizione all'infinito, ovvero l'energia per distruggere il sistema; nel fare questa affermazione stiamo supponendo che l'energia potenziale sia zero quando le cariche si trovano infinitamente distanti l'una dall'altra.

Se le cariche hanno segno opposto la forza è attrattiva e il lavoro per distruggere il sistema è negativo: due cariche legate hanno energia potenziale negativa.

Se abbiamo N cariche puntiformi l'energia potenziale del sistema è l'energia potenziale di ogni coppia di cariche presente, presa una sola volta.

7.5 Potenziale elettrico

Legato al concetto di energia potenziale c'è quello di potenziale, che si può introdurre solo per forze conservative.

La variazione di **potenziale elettrico** (o differenza di potenziale d.d.p.) tra un punto A e un punto B è uguale al lavoro che le forze del campo che agiscono su una carica devono compiere se spostiamo la carica dal punto A al punto B, tutto fratto la carica stessa:

$$\Delta V_{AB} = \frac{-L_{AB}}{q} \tag{7.6}$$

Anche il potenziale elettrico in un punto dello spazio è definito a meno di una costante additiva.

Tra la differenza di potenziale tra due punti e il campo elettrico lungo la congiungente i due punti che distano Δx esiste la seguente relazione: $E = -\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$.
Quindi tra due punti posti a potenziale differente esiste un campo elettrico che va dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore. Inoltre una carica positiva tende ad andare dalle regioni di spazio a potenziale maggiore a quelle a potenziale minore.

Come unità di misura dell'energia alternativa al joule possiamo usare, dalla definizione di d.d.p, l'elettronvolt: un **elettronvolt** è l'energia acquisita da un elettrone quando viene sottoposto ad un d.d.p di un volt. $1\,\mathrm{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

8 Circuiti

- Due o più elementi circuitali si dicono *in serie* se si trovano uno di seguito all'altro su uno stesso conduttore.
- Due o più elementi circuitali si dicono *in parallelo* se hanno i due capi in comune e niente si interpone tra essi.
- Chiamiamo *nodo* di un circuito un punto in cui confluiscono tre o più conduttori.
- Chiamiamo *ramo* il tratto di circuito tra due nodi.
- Chiamiamo *maglia* un percorso chiuso all'interno del circuito.

Forza elettromotrice: **lavoro** *per unità di carica* delle forze elettriche per spostare la carica lungo un percorso chiuso.

La misura della forza elettromotrice di un apparecchio si determina misurando la differenza di potenziale ai suoi morsetti a vuoto (senza che siano collegati apparecchi utilizzatori).

Se $\vec{F} = q\vec{E}$ per la definizione di campo elettrico allora il lavoro per spostare la carica q lungo un percorso elementare è $L = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q\vec{E} \cdot \vec{dl}$. Quindi il lavoro per spostare una carica lungo un percorso chiuso è: $q \oint \vec{E} \cdot \vec{dl}$.

Se il campo è elettrostatico, data la forma della legge di Coulomb, l'integrale è nullo. Se il campo è elettromotore, come un campo elettrico indotto, allora l'integrale è diverso da zero.

Forza elettromotrice indotta: lavoro per unità di carica delle forze responsabili del passaggio di corrente indotta, ovvero per spostare la carica lungo un percorso chiuso.

Negli apparecchi *generatori* si ha produzione di energia potenziale elettrostatica.

Negli apparecchi *utilizzatori* si ha consumo di energia potenziale elettrostatica.

Nei primi apparecchi le cariche mobili procedono in senso contrario a quello delle forze elettrostatiche, le quali compiono lavoro resistente.

Nei secondi le le cariche mobili procedono nello stesso verso delle forze elettrostatiche.

Nei primi apparecchi è localizzato, oltre al campo elettrostatico, un altro campo di forze capace di produrre il moto ordinato dei portatori di carica, detto *campo elettromotore*.

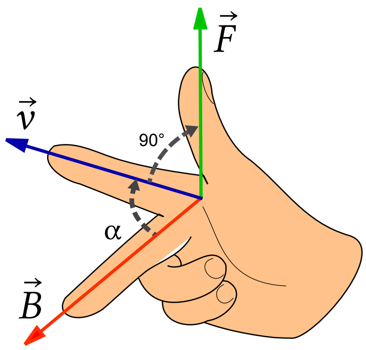
9 Magnetismo

In un punto dello spazio è presente un **campo magnetico** se una carica in moto in quel punto sente una forza che **dipende** dalla sua velocità.

Il campo elettrico in un punto dello spazio esercita una forza su una carica in quel punto che **non dipende** dalla velocità della carica stessa.

9.1 Forza di Lorentz

L'intensità della forza che una carica in moto in un punto in cui è presente un campo magnetico sente è data dalla **legge di Lorentz**, che è una delle equazioni costitutive dei campi elettromagnetici.



$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{9.1}$$

$$F = qvB \sin(\alpha) \tag{9.2}$$

La forza è il prodotto vettoriale della velocità $\vec{v}$ per il campo magnetico $\vec{B}$ e per la carica elettrica. Il verso relativo dei tre vettori, come illustrato in figura, può essere ottenuto con la regola della mano destra. Si prendono le tre dita della mano destra in ordine alfabetico (indice, medio, pollice): ad esse è associato rispettivamente il vettore velocità, campo magnetico e forza. Il vettore forza (se presente) è sempre perpendicolare la piano degli altri due vettori; l'angolo tra velocità e campo magnetico è invece variabile (alfa).

Una variante della forza di Lorentz riferita al caso di correnti elettriche è data dalla **II legge di Laplace**:

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B} \tag{9.3}$$

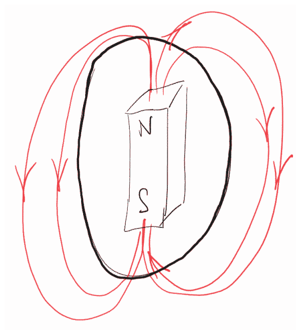
dove i è la corrente che attraversa un filo rettilineo di lunghezza l immerso in un campo magnetico B. Il filo è orientato come il verso della corrente che lo attraversa. Usiamo anche qui la regola della mano destra.

9.2 Teorema di Gauss per per il campo magnetico

Il flusso del campo magnetico *attraverso* una qualsiasi superficie chiusa è sempre uguale a zero.

$$\Phi(\vec{B}) = 0 \qquad ; \qquad \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{9.4}$$

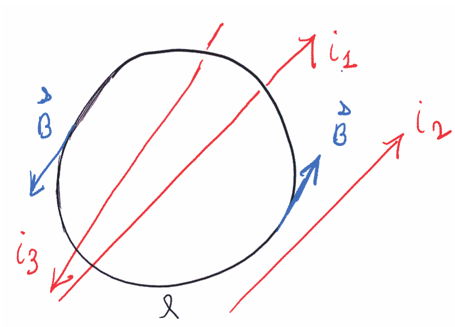
Anche per il campo magnetico esiste una legge analoga al teorema di Gauss per elettrostatica. Mentre il campo elettrico produce linee di campo aperte uscenti o entranti dalle cariche, invece le linee di campo magnetico sono sempre linee chiuse, come osserviamo nei magneti. Da questo fatto deriva il teorema di Gauss per il campo magnetico perché, sia che il magnete stia dentro o fuori la superficie, le linee di campo entranti pareggiano quelli uscenti e il flusso totale vale zero.



Per il calcolo esplicito del flusso del campo magnetico valgono le stesse considerazioni fatte per il flusso del campo elettrico.

9.3 Teorema circuitazionale di Ampère

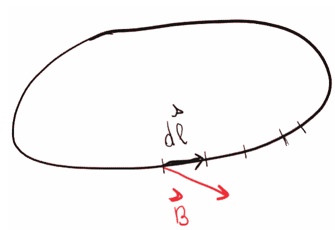
La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale al prodotto della permeabilità magnetica del vuoto per la somma algebriche delle correnti concatenate alla linea chiusa.



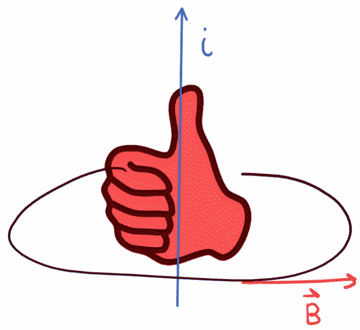
$$\begin{gathered} \Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum i \\ \sum_l \vec{B} \cdot \Delta\vec{l} = \mu_0 \sum i \\ \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum i \end{gathered} \tag{9.5}$$

Una corrente è detta *concatenata* con la linea chiusa se attraversa *qualsiasi* superficie avente la linea per contorno. Nella figura le correnti i_1 e i_3 sono concatenate; la corrente i_2 no.

La circuitazione elementare di un vettore $\vec{V}$ lungo un tratto rettilineo è il prodotto scalare del vettore per lo spostamento elementare e infinitesimo $\mathrm{d}\vec{l}$. Nel nostro caso il vettore $\vec{V}$ è il campo magnetico $\vec{B}$.
La circuitazione totale è la somma delle circuitazioni elementari o l'integrale se i trattini sono infinitesimi, lungo tutta la linea curva.



Per stabilire il segno reciproco del campo magnetico e della corrente usiamo la regola della mano destra: poniamo il pollice allineato al verso della corrente; allora il verso del campo magnetico è quello dato da tutte le altre dite strette ad indicare un pollice verso l'alto.
Se ci sono più correnti dobbiamo considerare il verso della corrente totale.



La cosiddetta I legge di Laplace ha stabilito formalmente il primo legame tra sorgenti del campo magnetico (una carica in movimento) e il campo da esse generato. Il Teorema di Ampère deriva da questa legge. Tuttavia noi prendiamo la legge di Ampère a fondamento dell'elettrodinamica nelle equazioni di Maxwell e non facciamo più riferimento alla legge di Laplace.

Anche *il teorema di Ampère stabilisce un legame tra sorgenti di campo magnetico (correnti elettriche) e il campo stesso*.

10 Elettrodinamica

10.1 Legge di Faraday-Neumann

Se il flusso del campo magnetico concatenato con un circuito chiuso varia nel tempo allora nel circuito si manifesta una forza elettromotrice data dalla seguente relazione:

$$f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \qquad f.e.m. = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \tag{10.1}$$

Oppure: la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa è uguale alla variazione del campo magnetico ad essa concatenato, rispetto al tempo e cambiato di segno.

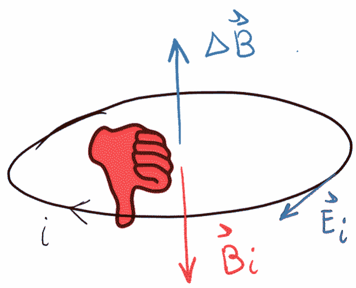
Legge di Lenz:

L'effetto della f.e.m indotta è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata.

La corrente indotta produce un campo magnetico indotto che si oppone alla variazione di campo che l'ha indotto.

La corrente indotta circola sempre in senso tale da contrastare la variazione del flusso magnetico concatenato.

Nella figura accanto il campo magnetico concatenato con il circuito sta aumentando verso l'alto ($\Delta\vec{B}$ verso l'alto). Si crea allora un campo magnetico indotto $\vec{B}_i$ verso il basso a causa di una corrente (e quindi di un campo elettrico indotto $\vec{E}_i$) che scorre sul circuito. Per stabilire il segno reciproco del campo magnetico indotto e della corrente usiamo la regola della mano destra: poniamo il pollice allineato al verso della campo; allora il verso della corrente è quello dato da tutte le altre dite strette a pugno.



Ciò che genera il moto delle cariche nel filo è un campo elettrico indotto, il cui verso è associato a quello della corrente. *Un campo magnetico in variazione può produrre un campo elettrico.* Questo campo elettrico non è conservativo.

10.2 Legge di Ampère-Maxwell

La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla permeabilità magnetica del vuoto per la somma algebrica delle correnti di carica e di spostamento concatenate con la linea chiusa.

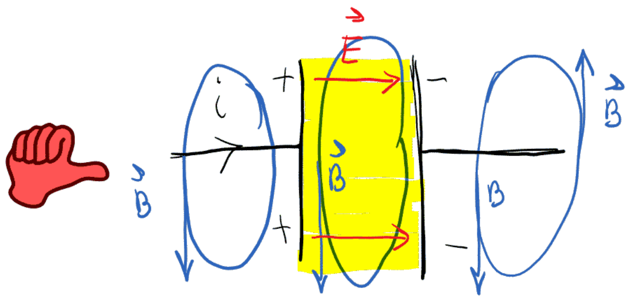
$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 (I_c + I_s) \tag{10.2}$$

Nel vuoto è presente solo la cosiddetta corrente di spostamento che è legata alla variazione di un campo elettrico. La legge, in quel caso si può esplicitare così:

La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla variazione del campo elettrico ad essa concatenato, rispetto al tempo, tutto moltiplicato per la costante dielettrico del vuoto e la permeabilità magnetica del vuoto.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \tag{10.3}$$

Intorno ad un filo percorso da corrente si manifesta un campo magnetico, come ci indica il Teorema di Ampère o più semplicemente la legge di Biot-Savart. Ma quando non è presente una corrente di cariche anche un campo elettrico in variazione può essere la sorgente di un campo magnetico, come può avvenire tra la armature di un condensatore in carica o scarica.



Come anche per la legge di Lenz *non è importante il verso di $\vec{E}$, ma il verso della sua variazione*. Nella figura, anche se non esplicitamente indicato, il campo ha quel verso e sta aumentando: quindi la sua variazione è verso destra. Osservando che nella legge di Ampère-Maxwell (10.3) non compare il meno della legge di Faraday-Neumann, per trovare il verso del campo magnetico poniamo la mano destra col pollice in evidenza e con il pollice nella direzione dell'aumento del campo elettrico.

Se siamo al di fuori del condensatore il campo elettrico non dovrebbe essere nullo e quindi con esso anche il campo magnetico? Sì se il condensatore fosse ideale, ma in pratica il campo elettrico si estende a tutto lo spazio, anche se sia il campo magnetico che quello elettrico hanno una forma assai più complicata di quella che si indica normalmente.

11 Relatività

"Son convinto che i filosofi abbiano avuto un'influenza dannosa sul progresso del pensiero scientifico, trasportando certi concetti fondamentali dal dominio dell'empirismo, dove essi erano sottoposti al nostro controllo, alle altezze intangibili dell'a-priori.

Ciò è particolarmente vero per i nostri concetti di tempo e di spazio, che i fisici sono stati obbligati dai fatti a far discendere dall'Olimpo dell'a-priori per adattarli e renderli servibili."

(Einstein, 1922, "Il significato della relatività")

"E noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti.

Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi andati a vuoto di constatare un moto della terra relativamente al "mezzo luminoso" portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche.

Questi due postulati bastano a pervenire ad un'elettrodinamica dei corpi in movimento semplice ed esente da contraddizioni, costruita sulla base della teoria di Maxwell per i corpi in quiete."

(Einstein, 1905, "Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento")

Principi della relatività ristretta

1. **Invarianza delle leggi fisiche**: le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziale.
2. **Costanza della velocità della luce**: la velocità della luce (nel vuoto) è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziale ed è indipendente dal moto della sorgente o dell'osservatore.

Tempo proprio: tempo che un orologio misura nel proprio sistema di riposo.

Il tempo misurato da un orologio tra due eventi che avvengono nello stesso posto: se il tik e il tak avvengono in posti diversi non è un tempo proprio.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \qquad ; \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{11.1}$$

Lunghezza propria: distanza tra due punti misurata da un osservatore in quiete rispetto ad essi.

Distanza tra due punti misurata nello stesso tempo. Se prima misuro un estremo e *poi* misuro l'altro non è una lunghezza propria (a meno che l'oggetto non rimanga fermo).

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \qquad ; \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{11.2}$$

Parte III

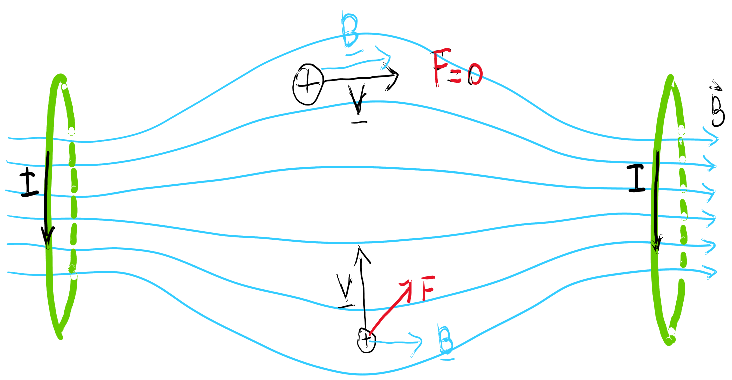
Temi

12 Moto di cariche in campo magnetico e Terra

Intorno alla Terra è presente un campo magnetico. Esso è approssimativamente assimilabile a quello di un magnete con il polo Sud allineato al polo Nord terrestre: questo polo Sud magnetico è comunque normalmente chiamato polo Nord magnetico terrestre.

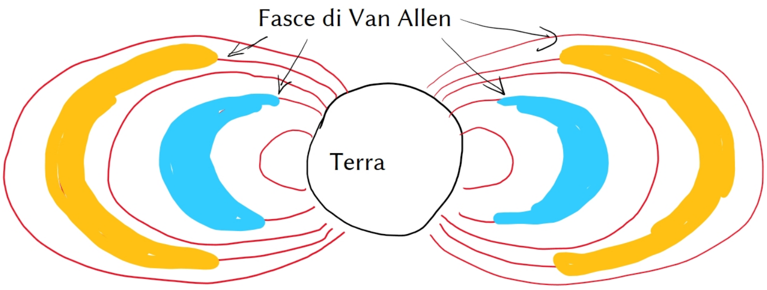
Dal Sole e dalle profondità cosmiche arrivano particelle cariche che quando entrano nella zona di influenza del campo magnetico terrestre cominciano a spiraleggiare lungo le linee di campo magnetico, convergendo verso i poli terrestri.

Per descrivere sommariamente il fenomeno, oltre a conoscere il moto di una carica elettrica in un campo magnetico, dobbiamo conoscere quella che è detta *bottiglia magnetica*. Essa è una configurazione di campo che favorisce il confinamento di particelle cariche in una ristretta regione di spazio. Può essere realizzata ad esempio con due spire percorse da corrente, come mostrato nella figura seguente.

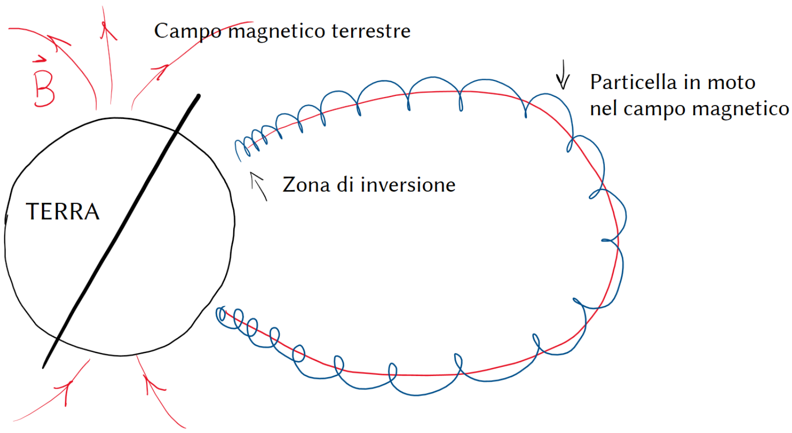


In essa possiamo evidenziare il moto di due particelle cariche: se la carica, come quella disegnata in alto, si muove parallelamente alle linee di campo magnetico, non subisce forza e persiste all'interno della bottiglia; se la carica, come quella disegnata in basso, si muove perpendicolarmente alle linee di campo magnetico, subisce una forza che tende a farla ruotare e rimanere confinata all'interno della bottiglia.

Intorno alla Terra, lungo la regione equatoriale, si formano due regioni a forma di toro ovvero di ciambella, chiamate *fasce di Van Allen*, che si comportano come due bottiglie magnetiche, intrappolando particelle cariche anche di grande energia, elettroni e protoni, come mostrato nella figura seguente.



Il moto di queste particelle è alquanto strano. Esse, come rappresentato nella figura seguente, spiraleggiano intorno alle linee di campo magnetico, percorrendo uno dei lobi delle fasce sino ad avvicinarsi all'atmosfera terrestre, preferibilmente in prossimità dei poli. Una volta avvicinate all'atmosfera urtano le particelle di gas di questa, perdendo energia, che viene rilasciata sotto forma di luce, e rallentando fin quasi a fermarsi, per poi tornare indietro. Questo è il fenomeno alla base delle *aurore polari*: esse sono visibili normalmente solo ad alte latitudini, ma in presenza di una eccezionale attività solare sono state osservate anche alle nostre latitudini.



13 Tubo catodico e moto di cariche elettriche

Una carica q immersa in un campo elettrico $\vec{E}$ sente una forza $\vec{F}$ nella direzione del campo elettrico, nello stesso verso se positiva e in verso opposto se negativa, e di intensità:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{13.1}$$

Il moto della carica può essere di qualsiasi tipo se la forza lo consente. In particolare il campo può accelerare la carica.

Una carica q in moto con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ sente una forza $\vec{F}$, detta forza di Lorentz, il cui valore è:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad ; \quad F = qB \sin \alpha \tag{13.2}$$

Il moto della carica, per la presenza del campo magnetico, può essere di tre tipi.

1. *Moto rettilineo uniforme*
   Se la velocità della particella è parallela alle linee di campo magnetico allora la forza di Lorentz è nulla in quanto l'angolo tra velocità campo è nullo e con esso il seno dell'angolo.
2. *Moto circolare uniforme*
   Se la velocità della particella è perpendicolare alle linee di campo magnetico allora la forza di Lorentz è massima in quanto l'angolo tra velocità e campo è 90° e il seno dell'angolo vale uno.

14 Propagazione delle onde elettromagnetiche

La propagazione delle onde elettromagnetiche fu prevista per primo da Maxwell intorno al 1870. Prima di Maxwell era ritenuto dai più che le interazioni elettriche e magnetiche non potessero propagarsi istantaneamente: egli mostra analiticamente che i campi elettrici e magnetici sono compatibili con onde che nel vuoto dovrebbero assumere una velocità simile a quella della luce nel vuoto. I campi elettrici e magnetici hanno una forma che può soddisfare quella che è detta equazione d'onda; la velocità nel vuoto indicata da tale equazione vale:

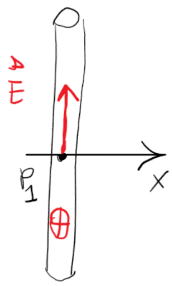
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{14.1}$$

Gli ingredienti per mostrare il meccanismo di propagazione sono l'equazione di Faraday-Neumann e quella di Ampère-Maxwell nel vuoto.

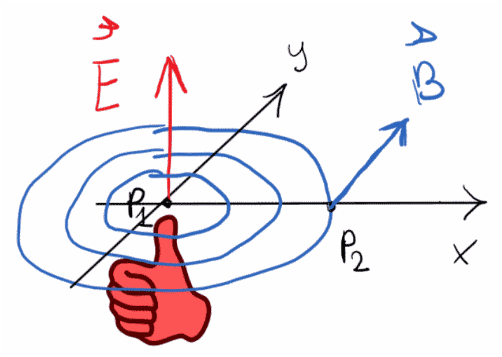
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \qquad ; \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \tag{14.2}$$

Quando usiamo queste equazioni normalmente le utilizziamo come se tra causa (un campo in variazione) ed effetto (un altro campo) ci fosse contemporaneità. Invece, anche temporalmente, l'una cosa segue l'altra.

Tutto ciò premesso supponiamo di avere una sorgente che produce un campo elettrico variabile. Supponiamo di avere ad esempio una carica elettrica puntiforme che facciamo oscillare su e giù su un'asta metallica centrata e perpendicolare all'asse x. Consideriamo l'intensità del campo elettrico solo nel centro dell'asta nel punto P. Se la carica va su e giù in maniera opportuna possiamo immaginare che nel punto P si crei un campo elettrico che varia sinusoidalmente.

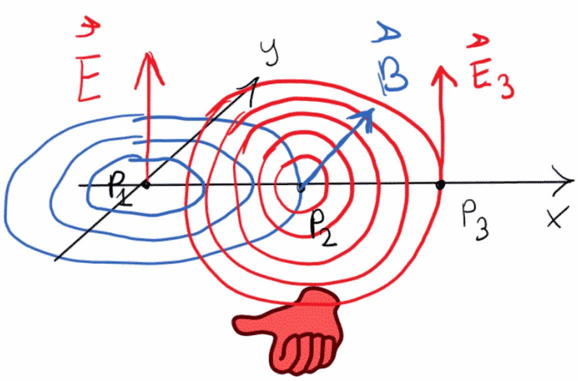


Per la legge di Ampère-Maxwell nel vuoto intorno al punto P si crea un campo magnetico le cui linee di campo si estendono via via col tempo sempre più lontano dal punto P_1. *Supponiamo che il campo* $\vec{E}$ *stia aumentando.*



Allora, per la regola della mano destra, intorno alla direzione del campo elettrico si creano delle linee di campo magnetico circolari. Il campo è presente in tutti i punti dell'asse x. Nel punto P_2 esso è *entrante* e se il campo elettrico sta aumentando. anch'esso sta aumentando

Mettiamoci allora nel punto P_2. In esso un campo magnetico in variazione (in aumento) produce una forza elettromotrice su ogni linea chiusa concatenata col campo stesso (i cerchi rossi della figura che segue). In particolare si produce un campo magnetico indotto: è la legge di Faraday-Neumann.



Prendiamo la linea rossa che passa per il punto P_3: per determinare il verso del campo indotto applichiamo la legge di Lenz. Il campo $\vec{B}$ è in aumento; si crea un campo indotto ad esso contrario (non segnato in figura); ponendo la mano destra con pollice allineato a questo campo magnetico indotto (verso di noi che guardiamo la figura) troviamo verso e direzione del campo elettrico (una corrente se ci fosse un filo) che genera questo campo magnetico indotto. Nel punto P_3 il campo elettrico indotto è quindi verso l'alto.

Siamo ritornati ad una situazione simile a quella di partenza.

Quindi: un campo elettrico in variazione produce un campo magnetico e il campo magnetico in variazione produce un campo elettrico.

15 Corrente continua e alternata

L'inizio della distribuzione pubblica della corrente elettrica risale agli anni '80 del diciannovesimo secolo. Si cominciò producendo corrente continua con piccole centrali che distribuivano la corrente a pochi chilometri dalla centrale stessa. Negli Stati Uniti si distinse l'opera di Edison con la sua rete a circa 100 V, ideale per le lampadine elettriche e adeguata all'utilizzo con apparecchiature industriali di limitata potenza. Tuttavia era chiaro fin dall'inizio che per distribuire energia elettrica a diversi chilometri dalle centrali sarebbe convenuto utilizzare corrente alternata.

La potenza trasmessa su una linea elettrica è direttamente proporzionale al prodotto della tensione per l'intensità della corrente.

$$P = iV \tag{15.1}$$

La potenza dissipata (e quindi persa) per effetto Joule è invece proporzionale al quadrato dell'intensità della corrente.

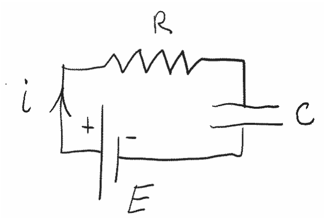
$$P = ri^2 \tag{15.2}$$

Quindi *si ha l'interesse ad aumentare la tensione ed abbassare l'intensità di corrente*. Tutto questo era già possibile in quegli anni con i trasformatori funzionanti a corrente alternata.

É importante sottolineare che non è la corrente alternata di per sé ad essere preferibile nella distribuzione, ma lo è in riferimento agli apparecchi ad essa funzionali ed in particolare al costo contenuto degli apparecchi di trasformazione per limitate potenze. Proprio su linee singole ad altissima potenza e per grandi distanze si preferisce oggi usare corrente continua (vedi le linee elettriche SAPEI e SACOI che collegano la Sardegna al continente).

Altro vantaggio della corrente alternata è il poter usare la corrente trifase ovvero tre segnali in corrente alternata sfasati tra loro di 120°. Questo consente di poter trasmettere tre segnali con soli tre cavi invece che con sei, dal momento che il potenziale zero di riferimento si può ottenere dalla somma dei tre segnali. Usando tre cavi invece che sei si dimezza ulteriormente la potenza dissipata.

16 Circuito RC



Un circuito RC è costituito da una resistenza R, da un condensatore di capacità C e da un generatore ideale di forza elettromotrice E.

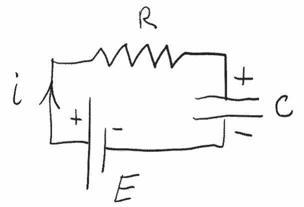
Se percorriamo il circuito nel verso della corrente abbiamo:

1. Una salita di tensione E ai capi del generatore.
2. Una caduta di tensione Ri ai capi della resistenza.
3. Una caduta di tensione V_c ai capi del condensatore (quando è carico).

16.1 Carica del condensatore

16.1.1 Descrizione fisica

Se il condensatore è inizialmente scarico e chiudiamo il circuito, immediatamente inizierà a circolare corrente partendo dal valore iniziale $i_0 = \frac{E}{R}$.



Il condensatore, inizialmente scarico, comincerà a caricarsi per il passaggio della corrente, ma la differenza di potenziale tra le armature si opporrà sempre più al passaggio della corrente e (idealmente dopo un tempo infinito) alla fine non circolerà più corrente. Le cariche positive dal generatore confluiscono su una armatura del condensatore che si carica anch'essa positivamente; la stessa cosa, ma con cariche negative, per l'altra armatura.

16.1.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$E - Ri - V_c = 0 \tag{16.1}$$

Ricordando la definizione di capacità ($C = \frac{q}{V_c}$) e di intensità di corrente ($i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) possiamo anche scrivere:

$$E - R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} = 0 \tag{16.2}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $q(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il metodo della separazione delle variabili: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita q e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned} E - \frac{q}{C} &= R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ \frac{EC - q}{C} &= R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ \frac{EC - q}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{EC - q} \\ -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{q - q_0} \end{aligned} \tag{16.3}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito il prodotto EC con la carica q_0 che il condensatore raggiunge dopo un tempo infinito; inoltre abbiamo cambiato il segno al denominatore del secondo membro (da cui il meno a primo membro) per rendere più semplice i passaggi successivi.

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita. Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui chiudiamo il circuito ad un instante finale t_f, ovvero tra quanto la carica del condensatore è zero a quando raggiunge il valore q_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} = \int_0^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q - q_0} \tag{16.4}$$

Nel primo integrale RC è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale ha la forma di un rapporto in cui a numeratore compare la derivata del denominatore: quindi è un integrale di questo tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{16.5}$$

dove $f(x) = q - q_0$ e $f'(x) = 1$.

Scriviamo allora:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \int_0^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q-q_0} \\
\left[-\frac{t}{RC}\right]_0^{t_f} &= [\ln(q_0-q)]_0^{q_f} \\
-\frac{t_f}{RC} &= (\ln(q_f-q_o)-\ln(-q_0)) \\
-\frac{t_f}{RC} &= \ln\left(\frac{q_f-q_0}{-q_0}\right)
\end{aligned} \tag{16.6}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza $q(t)$. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

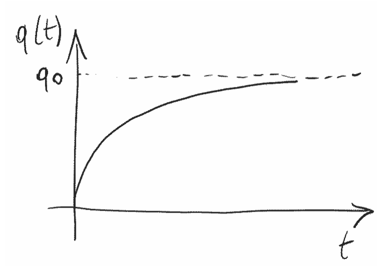
$$\begin{aligned}
\frac{q_f-q_0}{-q_0} &= e^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f-q_0 &= -q_0e^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f &= q_0-q_0e^{-\frac{t_f}{RC}} \\
q_f &= q_0(1-e^{-\frac{t_f}{RC}})
\end{aligned} \tag{16.7}$$

16.1.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente, considerando che t_f è un t generico e $q_f = q(t)$ troviamo infine:

$$q(t) = q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{16.8}$$

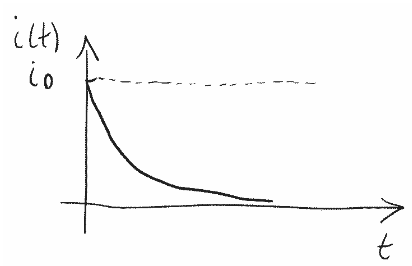
abbiamo trovato la quantità di carica presente nel condensatore dopo un tempo t dalla chiusura del circuito.



Ricordando la definizione di intensità di corrente come derivata della quantità di carica rispetto al tempo possiamo scrivere:

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = q_0\frac{\mathrm{d}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{\mathrm{d}t} = -q_0\frac{\mathrm{d}(e^{-\frac{t}{RC}})}{\mathrm{d}t} = -q_0(e^{-\frac{t}{RC}})(-\frac{1}{RC}) = \frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{EC}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = i_0e^{-\frac{t}{RC}} \tag{16.9}$$

dove $\frac{E}{R} = i_0$ è l'intensità di corrente iniziale.



Inoltre la tensione ai capi del condensatore è $V_c = Cq(t)$

$$V_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{16.10}$$

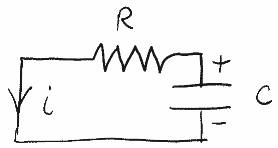
dove $EC = q_0$

16.2 Scarica del condensatore

16.2.1 Descrizione fisica

Se il condensatore è inizialmente carico e chiudiamo il circuito escludendo il generatore di tensione, immediatamente inizierà a circolare corrente partendo dal valore iniziale $i_0 = \frac{V_c}{R}$.

Il condensatore, inizialmente carico, comincerà a scaricarsi con il passaggio della corrente e alla fine (idealmente dopo un tempo infinito) non circolerà più corrente.
Il verso della corrente è formalmente opposto a quello della fase di carica, ma di questo non terremo conto nell'esposizione successiva.



16.2.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$-Ri - V_c = 0 \tag{16.11}$$

Ricordando la definizione di capacità ($C = \frac{q}{V_c}$) e di intensità di corrente ($i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) possiamo anche scrivere:

$$-R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} = 0 \tag{16.12}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $q(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il metodo della separazione delle variabili: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita q e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned} -\frac{q}{C} &= R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{q}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \frac{\mathrm{d}q}{q} \end{aligned} \tag{16.13}$$

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita.

Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui chiudiamo il circuito ad un instante finale t_f, ovvero tra quanto la carica del condensatore è il valore iniziale q_0 a quando raggiunge il valore q_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} = \int_{q_0}^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q} \tag{16.14}$$

Nel primo integrale RC è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale ha la forma del reciproco della variabile di integrazione: è del tipo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \tag{16.15}$$

Nel nostro caso x è la carica ed è certamente positiva: per cui non scriviamo il valore assoluto. Scriviamo allora:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} -\frac{\mathrm{d}t}{RC} &= \int_{q_0}^{q_f} \frac{\mathrm{d}q}{q} \\ \left[-\frac{t}{RC}\right]_0^{t_f} &= [\ln(q)]_{q_0}^{q_f} \\ -\frac{t_f}{RC} &= (\ln(q_f) - \ln(q_0)) \\ -\frac{t_f}{RC} &= \ln\left(\frac{q_f}{q_0}\right) \end{aligned} \tag{16.16}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza q_f. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

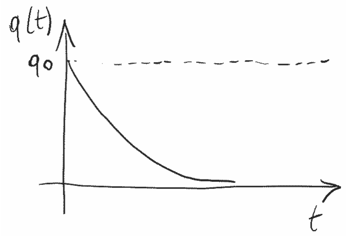
$$\begin{aligned} \frac{q_f}{q_0} &= e^{-\frac{t_f}{RC}} \\ q_f &= q_0 e^{-\frac{t_f}{RC}} \end{aligned} \tag{16.17}$$

16.2.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente, considerando che t_f è un t generico e $q_f = q(t)$ troviamo infine::

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{16.18}$$

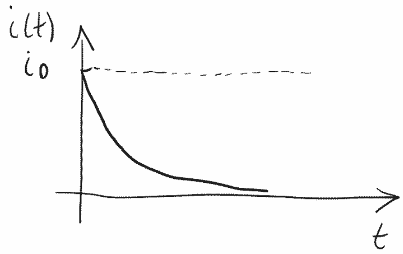
Abbiamo trovato la quantità di carica presente nel condensatore dopo un tempo t dalla chiusura del circuito.



Ricordando la definizione di intensità di corrente come derivata della quantità di carica rispetto al tempo possiamo scrivere:

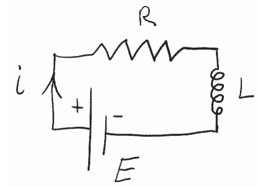
$$\begin{aligned} i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = q_0 \frac{\mathrm{d}(e^{-\frac{t}{RC}})}{\mathrm{d}t} = q_0(e^{-\frac{t}{RC}})(-\frac{1}{RC}) = -\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \\ -\frac{V_c C}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{V_c}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = -i_0 e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{16.19}$$

dove $\frac{V_c}{R} = i_0$ è l'intensità di corrente iniziale. Il segno meno indica che il verso della corrente è opposto a quello complessivo della fase di carica, a parità di configurazione e circuito.



17 Circuito RL

Un circuito RL è costituito da una resistenza R, da un induttore di induttanza L e da un generatore ideale di forza elettromotrice E.



Se percorriamo il circuito nel verso della corrente abbiamo:

1. Una salita di tensione E ai capi del generatore.
2. Una caduta di tensione Ri ai capi della resistenza.
3. Una caduta di tensione $-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ai capi dell'induttore.

17.1 Chiusura del circuito

17.1.1 Descrizione fisica

Supponiamo che il circuito sia aperto e non circoli corrente. Se lo chiudiamo la variazione di corrente produrrà una corrente nell'induttore per autoinduzione, *corrente detta di extrachiusura*, che si opporrà alla variazione che l'ha generata cioè la corrente prodotta dal generatore. La conseguenza complessiva è una corrente che parte da zero all'istante della chiusura del circuito e poi (tipicamente con tempi di pochi millisecondi) va a regime con una intensità $i_0 = \frac{E}{R}$.

17.1.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$E - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{17.1}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $i(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il *metodo della separazione delle variabili*: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita i e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned} E - Ri &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}t}{L} &= \frac{\mathrm{d}i}{E - Ri} \end{aligned} \tag{17.2}$$

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita. Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui chiudiamo il circuito ad un instante t_f, ovvero tra quanto la corrente è zero a quando raggiunge il valore i_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} \frac{\mathrm{d}t}{L} = \int_0^{i_f} \frac{\mathrm{d}i}{E - Ri} \tag{17.3}$$

Nel primo integrale $1/L$ è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale può essere visto come un rapporto in cui a numeratore compare (a parte il segno e una costante) la derivata del denominatore: quindi è un integrale di questo tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \tag{17.4}$$

dove $f(x) = E - Ri$ e $f'(x) = -R$.

Moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro per $-R$:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \frac{\mathrm{d}t}{L} &= -\frac{1}{R}\int_0^{i_f} \frac{-R\,\mathrm{d}i}{E - Ri} \\ \int_0^{t_f} -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{i_f} \frac{-R\,\mathrm{d}i}{E - Ri} \\ \left[-\frac{R}{L}t\right]_0^{t_f} &= [\ln(E - Ri)]_0^{i_f} \\ -\frac{R}{L}t_f &= (\ln(E - Ri_f) - \ln(E)) \\ -\frac{R}{L}t_f &= \ln\left(\frac{E - Ri_f}{E}\right) \end{aligned} \tag{17.5}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza $i(t)$. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

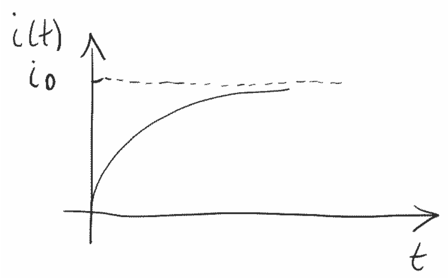
$$\begin{aligned} \frac{E - Ri_f}{E} &= e^{-t_f\frac{R}{L}} \\ E - Ri_f &= Ee^{-t_f\frac{R}{L}} \\ Ri_f &= E - Ee^{-t_f\frac{R}{L}} \\ i_f &= \frac{E}{R}(1 - e^{-t_f\frac{R}{L}}) \end{aligned} \tag{17.6}$$

17.1.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente troviamo infine:

$$i(t) = i_0(1 - e^{-t\frac{R}{L}}) \tag{17.7}$$

abbiamo trovato l'intensità di corrente che circola dopo un tempo t dalla chiusura del circuito. Abbiamo la somma di due termini: la corrente che circolerebbe nel corrispondente circuito con la sola resistenza R e l'*extracorrente di chiusura* che si oppone alla istantanea variazione di corrente dal valore nullo iniziale.



17.2 Apertura del circuito in cui circolava corrente

17.2.1 Descrizione fisica

Se nell'induttore circola corrente in esso si crea un campo magnetico e si accumula energia (energia cinetica associata alle cariche) Se apriamo il circuito, escludendo il generatore, la corrente con passa immediatamente a zero, ma decresce esponenzialmente a causa della differenza di potenziale presente ai capi dell'induttore che determina una cosiddetta extracorrente di apertura.

17.2.2 Derivazione matematica

Applichiamo quindi la seconda legge di Kirchhoff al circuito e scriviamo:

$$-Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{17.8}$$

Questa è una equazione differenziale nella funzione incognita $i(t)$ in quanto si tratta di una equazione che lega la funzione incognita con le sue derivate. Per risolvere questa particolare equazione si può usare il *metodo della separazione delle variabili*: si fa in modo che le due variabili (la funzione incognita i e la variabile t da cui dipende tale funzione) stiano separate ognuna ad un solo membro della equazione.

$$\begin{aligned} -Ri &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}i}{i} \end{aligned} \tag{17.9}$$

L'equazione differenziale rappresenta una relazione generale per la funzione incognita. Per risolvere l'equazione dobbiamo integrarla in un intervallo di valori: noi siamo interessati a sapere cosa accade nel circuito nel periodo che va dall'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ in cui apriamo il circuito ad un instante t_f ovvero tra quanto la corrente è i_0 (il valore presente un'istante prima di aprire il circuito) a quando raggiunge il valore i_f. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{t_f} -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t = \int_{i_0}^{i_f} \frac{\mathrm{d}i}{i} \tag{17.10}$$

Nel primo integrale $-R/L$ è una costante ed esce fuori dall'operazione di integrazione; quel che rimane è del tutto elementare. Il secondo integrale ha la forma del reciproco della variabile di integrazione: è del tipo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c \tag{17.11}$$

Nel nostro caso x è la corrente ed è certamente positiva: per cui non scriviamo il valore assoluto.

$$\begin{aligned}\left[-\frac{R}{L}t\right]_0^{t_f} &= [\ln(i)]_{i_0}^{i_f} \\ -\frac{R}{L}t_f &= (\ln(i_f) - \ln(i_0)) \\ -\frac{R}{L}t_f &= \ln\left(\frac{i_f}{i_0}\right)\end{aligned} \tag{17.12}$$

L'equazione è formalmente risolta. Tuttavia vogliamo mettere in evidenza i_f. Cominciamo facendo l'esponenziale di primo e secondo membro per eliminare il logaritmo.

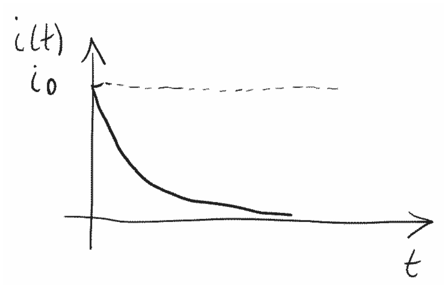
$$\begin{aligned}\frac{i_f}{i_0} &= e^{-t_f\frac{R}{L}} \\ i_f &= i_0 e^{-t_f\frac{R}{L}}\end{aligned} \tag{17.13}$$

17.2.3 Leggi fondamentali

Dal passaggio precedente troviamo infine:

$$i(t) = i_0 e^{-t\frac{R}{L}} \tag{17.14}$$

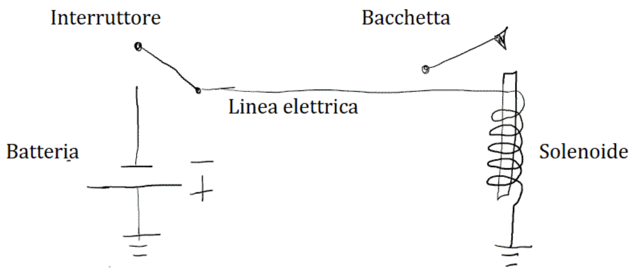
Abbiamo trovato l'intensità di corrente che circola dopo un tempo t dalla apertura del circuito: si tratta totalmente di una *extracorrente di apertura*.



18 Il telegrafo

Il telegrafo è un sistema di comunicazioni dati a distanza realizzato mediante opportuni codici. Il mezzo trasmissivo utilizzato può essere di vari tipi: corrente in un filo, onde elettromagnetica in aria, segnali ottici. Uno dei primi ad essere utilizzato ed a essere ampiamente diffuso fu il telegrafo ottico dei fratelli Chappe il quale utilizzava una grande asta mobile visibile a chilometri di distanza per trasmettere un semplice codice alfanumerico. Questo sistema si diffuse ampiamente in Francia dalla fine del '700 alla prima metà dell'800.

La tipologia di telegrafo che ebbe e continua ad avere la maggiore diffusione è stata quella elettrica su cavi conduttori. La sua invenzione è tradizionalmente associata ad un pittore e inventore americano: Samuel Morse. La realtà storica degli eventi è in realtà molto più articolata. Intorno agli anni '30 dell'ottocento in Europa e America diversi inventori realizzarono un telegrafo: tra questi Cooke e Wheatstone in Inghilterra, con un significativo successo commerciale, Henry negli Stati Uniti e Gauss in Germania, che non ne intravidero una prospettiva commerciale o di ampia diffusione. Morse tenta anch'egli di realizzare un apparecchio, senza particolare successo; chiederà aiuto a Joseph Henry, uno dei più importanti fisici americani, allora all'Università del New Jersey. Morse ebbe l'intuizione di realizzare un sistema completo di telegrafia e di propugnarne la diffusione: nel 1837 registrerà un primo brevetto, ma solo con l'appoggio finanziario del governo degli Stati Uniti riuscirà nel 1844 a meter su la prima linea telegrafica tra Washington e Baltimora, divenendo nei decenni successivi uno degli uomini più ricchi d'America. Un merito specifico di Morse è il codice che da lui prende il nome.



Il telegrafo su filo può essere pensato come un semplice circuito RL costituito da una batteria o alimentatore e un solenoide che, quando attraversato da corrente, produce un campo magnetico che aziona un opportuna bacchetta in grado di produrre o un ticchettio ben udibile o di tracciare una striscia più o meno lunga su un nastro di carta. I limiti di applicabilità sono legati in particolare all'attenuazione della corrente con l'aumentare della lunghezza del filo a causa della resistenza dello stesso. Infatti, per la prima legge di Ohm, $I = V/R$ e se diminuisce l'intensità di corrente diminuisce anche la capacità del solenoide di produrre un campo magnetico e quindi di muovere la bacchetta ad essa legata. Osserviamo che fino agli inizi del '900 non esistevano amplificatori e quindi per trasmettere un segnale ricevibile a grande distanza bisognava usare almeno una elevata tensione e potenza.

19 Energia e campi elettrici e magnetici

19.1 Legame tra energia e campo elettrico

L'energia immagazzinata in un condensatore di capacità C, sottoposto ad una differenza di pontenziale ΔV è:

$$W_C = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \tag{19.1}$$

Questa espressione si può scrivere in funzione del campo elettrico presente tra le armature del condensatore.

Consideriamo innanzi tutto una grandezza più generale di questa energia: *la densità di energia volumica* w_E, cioè l'energia per unità di volume, ovvero il rapporto tra quell'energia del condensatore e il volume contenuto al suo interno.

$$w_E = \frac{W_C}{V} \tag{19.2}$$

Consideriamo un condensatore piano il cui volume è $V = Sd$, prodotto della superficie delle armature per la loro distanza, e la sua capacità.

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{19.3}$$

Consideriamo anche la relazione tra la differenza di potenziale ΔV tra due punti distanti d e il campo elettrico tra i due punti.

$$E = -\frac{\Delta V}{d} \qquad ; \qquad \Delta V = -Ed \tag{19.4}$$

Sostituiamo queste relazioni nell'espressione di W_C.

$$w_E = \frac{W_C}{V} = \frac{\frac{1}{2} C \Delta V^2}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{C \Delta V^2}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{E^2 d^2}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tag{19.5}$$

Abbiamo ottenuto una relazione tra l'energia presente in un condensatore e il campo elettrico al suo interno: la possiamo considerare una relazione generale che lega campo elettrico all'energia.

19.2 Legame tra energia e campo magnetico

L'energia immagazzinata in un induttore di induttanza L, attraversato da una corrente i è:

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2 \tag{19.6}$$

Questa espressione si può scrivere in funzione del campo magnetico presente all'interno dell'induttore.

Consideriamo innanzi tutto una grandezza più generale di questa energia: *la densità di energia volumica w_B*, cioè l'energia per unità di volume, ovvero il rapporto tra quell'energia dell'induttore e il volume contenuto al suo interno.

$$w_B = \frac{W_L}{V} \tag{19.7}$$

Consideriamo come induttore un solenoide il cui volume è $V = Sl$, prodotto della sezione S delle sue spire per la sua lunghezza l, e la sua induttanza (N è il numero di spire).

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \tag{19.8}$$

Consideriamo anche la relazione che ci da l'intensità del campo magnetico presente al suo interno (per lo meno per un solenoide ideale di lunghezza infinita).

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i \qquad ; \qquad B^2 = {\mu_0}^2 \frac{N^2}{l^2} i^2 \tag{19.9}$$

Sostituiamo queste relazioni nell'espressione di W_B.

$$w_B = \frac{W_L}{V} = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Sl} = \frac{1}{2}\frac{Li^2}{Sl} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 S}{l}\frac{i^2}{Sl} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 i^2}{l^2} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{l^2} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{19.10}$$

Abbiamo ottenuto una relazione tra l'energia presente in un solenoide e il campo magnetico al suo interno: la possiamo considerare una relazione generale che lega campo magnetico all'energia.