ESERCIZI UNITA' F – SOMMARIO

F.I. Dissipazione di calore in un tubo percorso da acqua calda

– *Problema*

In un tubo di rame con diametro interno 200 mm e spessore di parete 2 mm scorre acqua in pressione a temperatura costante di 170°C. Si assuma pari a 300 W/(m^2·°C) il coefficiente di scambio termico convettivo interno (parete/acqua, convezione forzata in liquido), e pari a 399 W/(m·°C) la conduttività termica del rame.

Sapendo che l'ambiente intorno al tubo si trova a temperatura 20°C ed essendosi stimato pari a 5 W/(m^2·°C) il coefficiente di scambio termico convettivo esterno (parete/aria, convezione naturale in aeriforme), determinare la potenza termica dissipata per unità di lunghezza del tubo.

– *Dati*

D_i = 200 mm = 0.200 m	(diametro interno del tubo)
s_p = 2 mm = 0.002 m	(spessore di parete del tubo)
λ_p = 399 W/(m·°C)	(conduttività termica del rame)
T_i = 170°C	(temperatura dell'acqua all'interno del tubo)
h_i = 300 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
T_e = 20°C	(temperatura dell'aria ambiente)
h_e = 5 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)

– *Determinare*

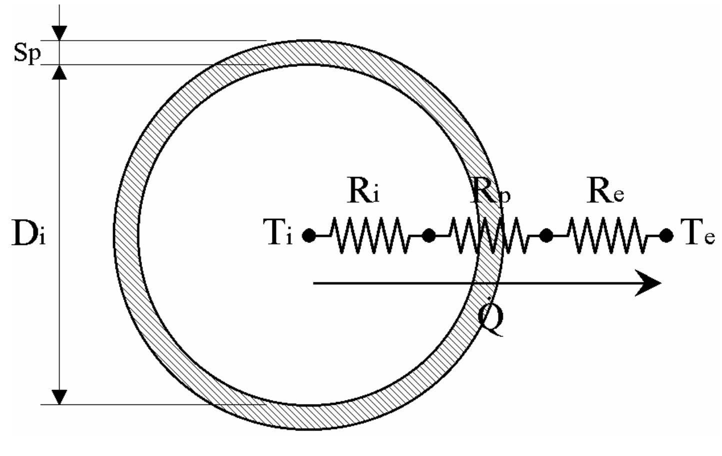
$\dot{Q}$ (potenza termica dispersa)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di convezione uniformi sulle pareti e lungo il condotto, conduzione monodimensionale in geometria cilindrica, effetti radiativi trascurabili.

– *Soluzione*

Il tubo in esame, visto in sezione, ed il circuito termico ad esso relativo possono essere rappresentati come segue:



Essendo richiesta la potenza termica dispersa per unità di lunghezza del tubo, conviene considerare un tratto di tubo di lunghezza unitaria:

$$L = 1 \ \text{m}$$

Il diametro esterno del tubo vale, evidentemente:

$$D_e = D_i + 2 \cdot s_p = 0.204 \ \text{m}$$

Le singole resistenze della serie possono essere calcolate tramite le relazioni sotto riportate. Per la resistenza convettiva interna (in acqua) si ha:

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i \cdot \pi \cdot D_i L} = 0.005305 \ \text{°C/W}$$

Per la resistenza conduttiva della parete in rame:

$$R_i = \frac{\ln(D_e/D_i)}{2\pi \cdot \lambda_p L} \equiv \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi \cdot \lambda_p L} = 0.000008 \ \text{°C/W}$$

Per la resistenza convettiva esterna in aria:

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot D_e L} = 0.312069 \ \text{°C/W}$$

La resistenza totale della serie vale:

$$R = R_i + R_p + R_e = 0.317382 \ \text{°C/W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso la parete del tratto considerato, avente lunghezza 1 m, è in conclusione pari a:

$$\dot{Q} = \frac{(T_i - T_e)}{R} = 473 \ \text{W} \quad (\text{W/m})$$

– *Commenti*

I vari contributi alla resistenza termica totale hanno peso molto differente tra loro. In particolare, la resistenza termica della parete in rame è così piccola rispetto alle altre da essere pressoché trascurabile.

F.II. Dissipazione di calore in un tubo percorso da acqua calda coibentato

– *Problema*

Si consideri il tubo del problema precedente, che questa volta si vuole rivestire con uno strato cilindrico di materiale isolante schiumato, avente conducibilità termica 0.30 W/(m·°C). Determinare quale spessore deve presentare tale rivestimento per dimezzare le dispersioni termiche, calcolando il conseguente diametro esterno del tubo coibentato.

– *Dati*

D_i = 200 mm = 0.200 m	(diametro interno del tubo in rame)
s_p = 2 mm = 0.002 m	(spessore di parete del tubo in rame)
$D_{p/s}$ = 0.204 m	(diametro esterno del tubo in rame)
λ_p = 399 W/(m·°C)	(conduttività termica del rame)

$\lambda_s = 0.30$ W/(m·°C) (conduttività dell'isolante termico schiumato)
$T_i = 170$°C (temperatura dell'acqua all'interno del tubo)
$h_i = 300$ W/(m^2·°C) (coefficiente di convezione interno)
$T_e = 20$°C (temperatura dell'aria ambiente)
$h_e = 5$ W/(m^2·°C) (coefficiente di convezione esterno)
$L = 1$ m (lunghezza unitaria)
$\dot{Q} = 472.6/2$ W $= 236.3$ W (potenza termica dissipabile)

– *Determinare*

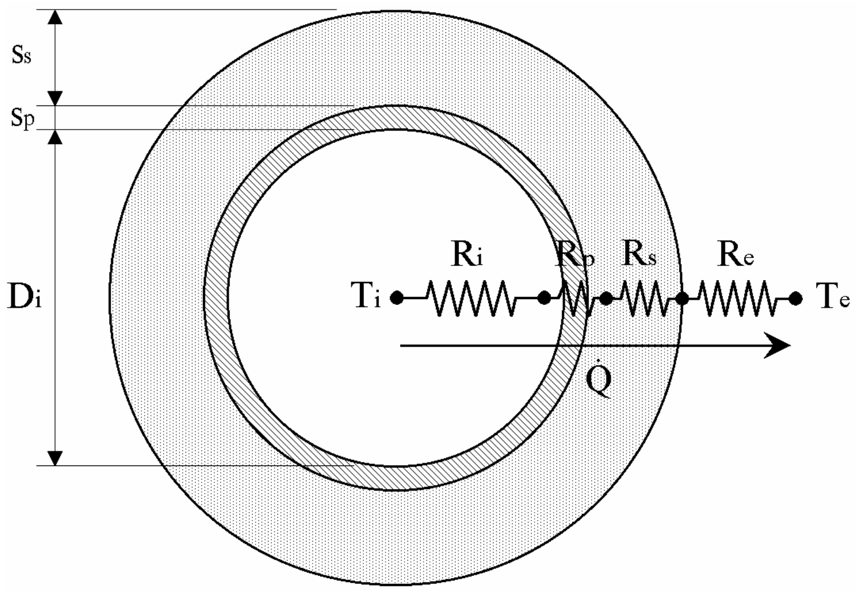
s_s (spessore del rivestimento isolante)
D_e (diametro esterno del tubo coibentato)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di convezione uniformi sulle pareti e lungo il condotto, conduzione mono-dimensionale in geometria cilindrica, resistenze di contatto trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– *Soluzione*

Il tubo in esame, visto in sezione, ed il circuito termico ad esso relativo sono rappresentati nella figura seguente:



Per non dissipare una potenza termica superiore a quella prescritta, la resistenza totale della serie deve presentare valore non inferiore a:

$$R = R_i + R_p + R_s + R_e = \frac{(T_i - T_e)}{\dot{Q}} = 0.634763 \text{ °C/W}$$

R_i e R_p non sono cambiate rispetto al caso trattato nel problema precedente. Pertanto, impiegando i valori già calcolati, si ottiene:

$$R_s + R_e = R - R_i - R_p = 0.629450 \text{ °C/W}$$

Le due resistenze incognite possono essere espresse in funzione di s_s come segue:

$$R_s + R_e = \frac{\ln\left[D_e / D_{p/s}\right]}{2\pi \cdot \lambda_s L} + \frac{1}{h_e A_e}$$

ovvero

$$\frac{\ln\left(1 + 2 \cdot s_s / D_{p/s}\right)}{2\pi \cdot \lambda_s L} + \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot \left(D_{p/s} + 2 \cdot s_s\right) L} = 0.629450 \text{ °C/W}$$

Poiché l'equazione precedente non è immediatamente esplicitabile rispetto a s_s, che compare a numeratore nel primo addendo e a denominatore nel secondo, è necessario procedere alla sua determinazione per tentativi, cercando di far sì che la parte sinistra dell'equazione coincida con la parte destra.

Tentativo	s_s (m)	$R_s + R_e$
1	0.100	0.520078
2	0.200	0.681252
3	0.150	0.606142
4	0.170	0.637372
5	0.160	0.621967
6	**0.165**	**0.629720**

Un ragionevole accordo si ottiene per s_s = 165 mm. In definitiva, si ottiene un diametro esterno del condotto coibentato pari a:

$$D_e = D_{p/s} + 2 \cdot s_s \equiv D_i + 2 \cdot \left(s_p + s_s\right) = 0.534 \text{ m} = 534 \text{ mm}$$

– *Commenti*

Il profilo radiale di temperatura può essere tracciato calcolando le temperature intermedie. A tal fine, va rammentato che la potenza termica trasmessa deve attraversare ogni strato resistivo della serie. Si ottiene quindi, per la temperatura sulla superficie interna del tubo in rame:

$$T_{i,s} = T_i - R_i \dot{Q} = 168.746\text{°C} = 168.7\text{°C}$$

Il piccolo salto di temperatura (<1.3°C) è dovuto al fatto che si è in presenza di convezione forzata in liquido, che comporta un coefficiente di convezione assai elevato.

All'interfaccia tra rame e isolante schiumato si ha:

$$T_{p/s} = T_i - \left(R_i + R_p\right)\dot{Q} \equiv T_{i,s} - R_p \cdot \dot{Q} = 168.744\text{°C}$$

Il salto di temperatura attraverso il rame è addirittura trascurabile. Pertanto il rivestimento in schiumato raggiunge, sulla sua superficie interna, una temperatura prossima a quella dell'acqua calda (170°C), il che richiede l'impiego di un materiale con adeguate proprietà di resistenza alle alte temperature. Si ricorda che si sono trascurate, in favore di sicurezza, le resistenze di contatto tra rame e rivestimento.

Per calcolare la temperatura sulla superficie esterna dello strato isolante occorre valutare preliminarmente la resistenza dello strato isolante medesimo, oppure la resistenza convettiva esterna in aria:

$$R_s = \frac{\ln\left(D_e / D_{p/s}\right)}{2\pi \cdot \lambda_s L} = \frac{\ln\left[1 + 2 \cdot s_s / D_{p/s}\right]}{2\pi \cdot \lambda_s L} = 0.5105 \text{ °C/W}$$

ovvero

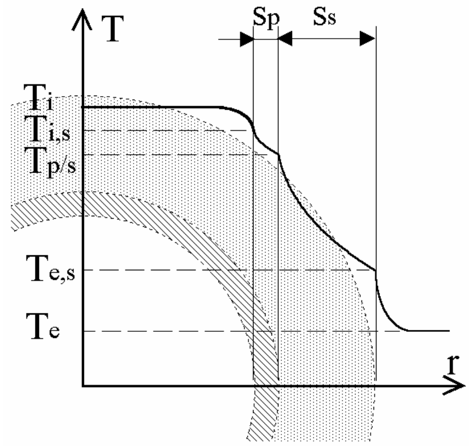
$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot (D_{p/s} + 2 \cdot s_s) L} = 0.1192 \ \ °C/W$$

Si ha quindi:

$$T_{e,s} = T_{p/s} + R_s \cdot \dot{Q} \equiv T_e - R_e \cdot \dot{Q} = 48.2°C$$

Il profilo di temperatura attraverso la parete è quello rappresentato nella figura a lato.

L'andamento attraverso gli strati conduttivi è, in geometria cilindrica ed in assenza di generazione, di tipo logaritmico – non lineare, quindi. L'andamento in aria, attraverso lo strato limite convettivo esterno e attraverso lo strato limite convettivo interno, è reso solo qualitativamente.



La conduttività termica attribuita all'isolante è superiore di un ordine di grandezza a quella dei materiali commercialmente disponibili, per i quali si ha λ_s = 0.030÷0.060 W/(m·°C). Inoltre, per il coefficiente di scambio termico superficiale si hanno valori circa doppi, con h_e = 8÷15 W/(m^2·°C). Ciononostante, i risultati ottenuti rimangono perfettamente validi da un punto di vista concettuale.

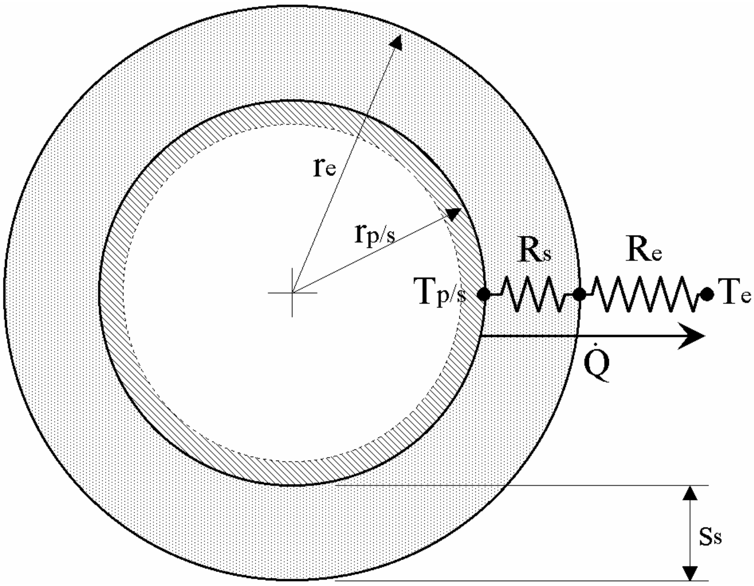
F.III. Raggio critico di isolante

– *Problema*

Un tubo con diametro 300 mm presenta temperatura superficiale (esterna) pari a 200°C. Il tubo è posto in un ambiente a temperatura 20°C e, per ridurre le perdite di calore verso l'ambiente suddetto, deve essere rivestito con uno strato di isolante termico schiumato avente conduttività 0.35 W/(m·°C). Sapendo che il coefficiente di scambio termico convettivo sulla superficie esterna dello schiumato è mediamente pari a 2 W/(m^2·°C), si calcoli il calore scambiato con l'ambiente in funzione dello spessore del rivestimento isolante.

– *Dati e schema*

$D_{p/s}$ = 300 mm = 0.300 m	(diametro esterno del tubo non coibentato)
$T_{p/s}$ = 200°C	(temperatura esterna del tubo non coibentato)
T_e = 20°C	(temperatura dell'aria ambiente)
h_e = 2 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione esterno)
λ_s = 0.35 W/(m·°C)	(conduttività dell'isolante termico schiumato)



– *Determinare*

$\dot{Q} = \dot{Q}(s_s)$ (potenza dispersa vs. spessore di isolante)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di convezione uniformi sulle pareti e lungo il condotto, conduzione monodimensionale in geometria cilindrica, resistenze di contatto trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– *Soluzione*

Facendo riferimento al circuito termico in figura, la potenza termica che attraversa lo strato cilindrico di isolante e l'interfaccia convettiva esterna può essere espressa come segue:

$$\dot{Q}(s_s) = \frac{(T_{p/s} - T_e)}{R_s + R_e} = \frac{(T_{p/s} - T_e)}{\dfrac{\ln(r_e / r_{p/s})}{2\pi \cdot \lambda_s L} + \dfrac{1}{h_e \cdot 2\pi \cdot r_e L}}$$

Nell'equazione si sono introdotti i seguenti parametri:

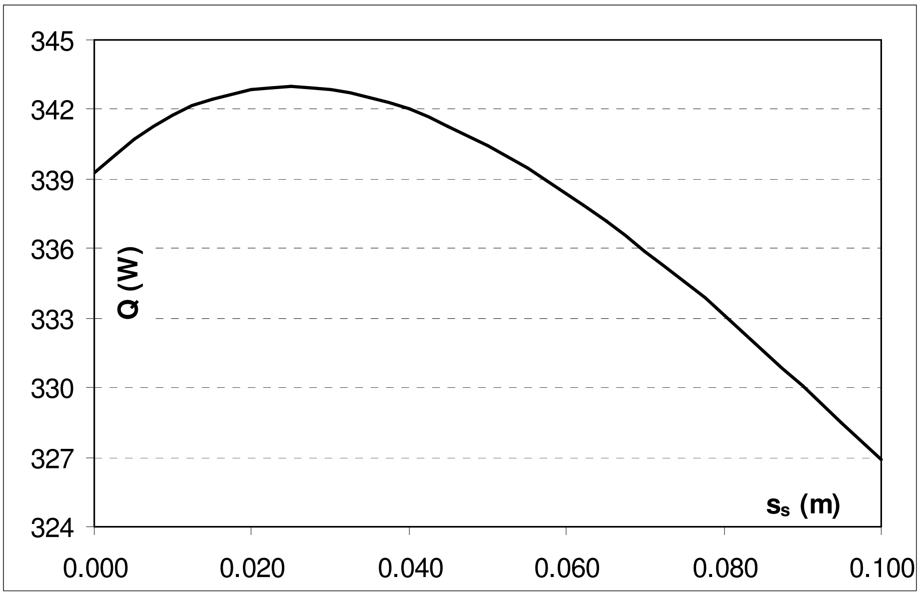
$$r_{p/s} = \frac{D_{p/s}}{2} = 0.150 \text{ m}, \qquad r_e = r_{p/s} + s_s$$

Non essendo specificata la lunghezza del tubo, è conveniente far riferimento ad un tratto di tubo con lunghezza unitaria:

$$L = 1 \text{ m}$$

Sostituendo una sequenza crescente di valori di s_s, si ottengono i valori della potenza termica scambiata riportati nella tabella seguente:

s_s (m)	$\dot{Q}$ (W)		s_s (m)	$\dot{Q}$ (W)
0.000	339.3		0.055	339.5
0.005	340.7		0.060	338.4
0.010	341.7		0.065	337.2
0.015	342.4		0.070	335.9
0.020	342.8		0.075	334.5
0.025	343.0		0.080	333.1
0.030	342.9		0.085	331.6
0.035	342.5		0.090	330.1
0.040	342.0		0.095	328.5
0.045	341.3		0.100	326.9
0.050	340.5			



Si noti che la massima potenza scambiata non si ha in corrispondenza dell'ascissa $s_s = 0$. Il valore di s_s per il quale si verifica il massimo si può individuare differenziando rispetto a r_e la relazione per il calcolo della potenza termica scambiata ed uguagliando il risultato a zero.

$$\frac{d\dot{Q}}{dr_e} = 2\pi \cdot L\left(T_{p/s} - T_e\right) \cdot \frac{\dfrac{1}{\lambda_s r_e} - \dfrac{1}{h_e r_e^2}}{\left[\dfrac{\ln\left(r_e / r_{p/s}\right)}{\lambda_s} + \dfrac{1}{h_e r_e}\right]} = 0$$

I fattori moltiplicativi a sinistra del rapporto ed il denominatore del rapporto stesso sono tutti non nulli e, di conseguenza, possono essere eliminati. Si ottiene così

$$\frac{1}{\lambda_s r_e} - \frac{1}{h_e r_e^2} = 0$$

ovvero, poiché r_e è necessariamente non nullo,

$$\frac{1}{\lambda_s} - \frac{1}{h_e r_e} = 0$$

Risolvendo la relazione precedente rispetto a r_e, si ottiene il cosiddetto "raggio critico" di isolamento termico (o raggio critico di isolante):

$$r_{e,critico} = \frac{\lambda_s}{h_e} = 0.175 \text{ m} = 175 \text{ mm}$$

In definitiva, lo spessore di isolante che comporta la massima potenza termica trasmessa vale:

$$s_{s,critico} = r_{e,critico} - r_{p/s} = 0.025 \text{ m} = 25 \text{ mm}$$

– *Commenti*

In geometria cilindrica, non è assolutamente detto che l'aggiunta di isolante termico diminuisca il calore scambiato. Ciò si verifica solo una volta che si è superato un certo valore del raggio esterno (o del diametro esterno) dello strato di isolante, detto "raggio critico di isolamento".

Anche in questo caso, i valori attribuiti alla conduttività termica dell'isolante e al coefficiente di scambio termico esterno non sono realistici.

F.IV. Raggio critico di isolante (2)

– *Problema*

Un cavo elettrico con diametro 4 mm e resistenza per unità di lunghezza pari a $0.8 \cdot 10^{-4}$ Ω/m è ricoperto da uno strato di materiale plastico per isolamento elettrico, caratterizzato da conduttività 0.18 W/(m·°C) e massima temperatura ammessa pari a 120°C. Il coefficiente di convezione sulla superficie esterna del cavo rivestito si può stimare pari a 12 W/(m^2·°C), mentre la temperatura ambiente massima prevista è pari a 35°C.

Dimensionare l'isolamento plastico in modo da massimizzare la corrente che può attraversare il cavo è stimare il valore di tale corrente.

– *Dati e schema*

d_c = 4 mm = 0.004 m	(diametro del cavo elettrico non rivestito)
R' = $0.8 \cdot 10^{-4}$ Ω/m	(resistenza elettrica per unità di lunghezza del cavo)
λ_r = 0.18 W/(m·°C)	(conduttività del materiale plastico di rivestimento)
$T_{r,max}$ = 120°C	(massima temperatura ammessa per il materiale plastico di rivestimento)
h_e = 12 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione sulla superficie esterna del cavo rivestito)
T_e = 35°C	(massima temperatura prevista per l'aria ambiente)

– *Determinare*

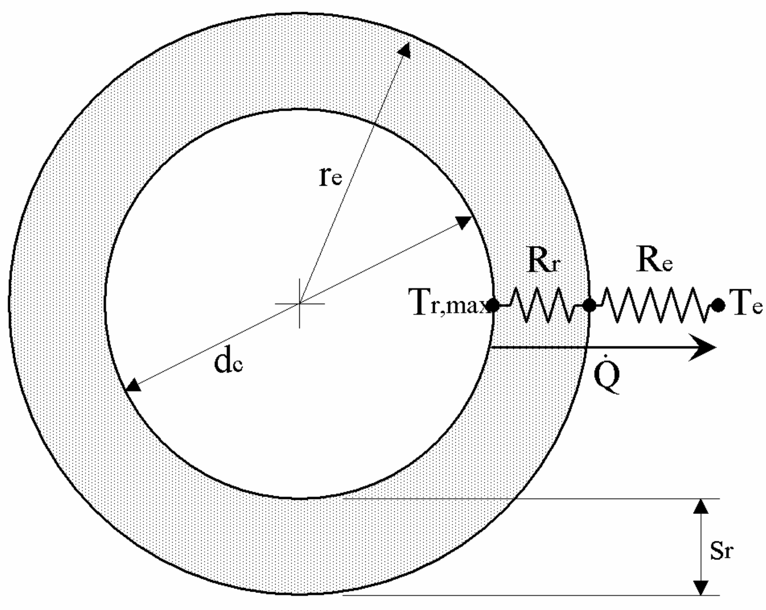
s_r	(spessore rivestimento)
I_{max}	(massima corrente ammessa)

– *Ipotesi*

Problema stazionario, proprietà costanti con la temperatura, materiali omogenei, temperature e coefficienti di scambio termico convettivo uniformi sulle pareti e lungo il cavo, conduzione mono-dimensionale in geometria cilindrica, resistenze di contatto trascurabili, effetti radiativi trascurabili.

– *Soluzione*

Poiché la produzione di calore (per effetto Joule) ha luogo soltanto nel cavo elettrico, nel rivestimento plastico la massima temperatura si verificherà in corrispondenza della superficie di contatto con il cavo stesso. Pertanto, il problema si può schematizzare mediante il circuito termico equivalente in figura.



Alla luce di quanto visto nel problema F-III, la massima dissipazione del calore verso l'ambiente si avrà per uno spessore del rivestimento tale che il raggio esterno del cavo rivestito sia pari al raggio critico di isolamento. Tale raggio critico vale:

$$r_e = \frac{\lambda_r}{h_e} = \frac{0.18}{12} = 0.015 \text{ m} = 15 \text{ mm}$$

Il raggio del cavo non rivestito è ovviamente pari a:

$$r_c = \frac{d_c}{2} = 0.002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Lo spessore del rivestimento plastico vale quindi:

$$s_r = r_e - r_c = 0.013 \text{ m} = 13 \text{ mm}$$

Per stimare la potenza termica trasmessa attraverso lo strato cilindrico di isolante e l'interfaccia convettiva esterna, conviene far riferimento ad un tratto di cavo con lunghezza unitaria (L = 1 m), in cui la resistenza termica del rivestimento plastico vale:

$$R_r = \frac{\ln(r_e/r_c)}{2\pi\lambda_r L} = \frac{\ln(0.015/0.002)}{2\pi \cdot 0.30 \cdot 1} = 1.782 \text{ °C/W}$$

La resistenza termica dello strato convettivo esterno vale:

$$R_e = \frac{1}{h_e 2\pi r_e L} = \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.015 \cdot 1} = 0.884 \text{ °C/W}$$

La potenza termica trasmessa che comporta un valore pari al massimo ammissibile della temperatura sulla superficie interna del rivestimento plastico si può stimare mediante la seguente relazione:

$$\dot{Q}_{max} = \frac{(T_{r,max} - T_e)}{R_r + R_e} = \frac{120 - 35}{1.782 + 0.884} = 31.9 \text{ W (ovvero W/m)}$$

Considerando che tale potenza, riferita ad un tratto di cavo di lunghezza unitaria (e la cui misura si può quindi indicare anche in W/m), è quella massima dissipabile nelle condizioni esaminate, la massima corrente elettrica ammissibile può essere calcolata mediante la legge di Ohm:

$$\dot{Q}_{max} = R' I_{max}^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{max} = \sqrt{\frac{\dot{Q}_{max}}{R'}} = \sqrt{\frac{31.9}{0.8 \cdot 10^{-4}}} = 631 \text{ A}$$

– *Commenti*

Nella pratica, la funzione primaria del rivestimento è quella di assicurare un adeguato isolamento elettrico. Lo spessore minimo da adottare è quindi vincolato al grado di isolamento elettrico richiesto, indipendentemente dai problemi di ordine termico.

La stima del coefficiente di convezione superficiale non è mai molto accurata, ed è in generale opportuno porsi in favore di sicurezza. Se, ad esempio, per h_e si può stimare un valore tipico pari a 12 W/(m^2·°C), ma si può prevedere che in talune condizioni operative h_e possa scendere fino a 5 W/(m^2·°C), è più opportuno far riferimento a quest'ultimo valore per la stima della corrente massima ammissibile:

$$R_e = \frac{1}{h_e 2\pi r_e L} = \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.015 \cdot 1} = 2.122 \text{ °C/W}$$

$$\dot{Q}_{max} = \frac{\left(T_{r,max} - T_e\right)}{R_r + R_e} = \frac{120 - 35}{1.782 + 2.122} = 21.8 \text{ W (ovvero W/m)}$$

$$I_{max} = \sqrt{\frac{\dot{Q}_{max}}{R'}} = \sqrt{\frac{21.8}{0.8 \cdot 10^{-4}}} = 522 \text{ A}$$

In generale, non sussistono problemi se il valore effettivo di h_e è superiore a quello atteso.

F.V. Conduzione e convezione in geometria cilindrica

– *Problema*

Si consideri un dispositivo elettronico a geometria cilindrica verticale, con altezza 38.1 mm, diametro 12.7 mm e superfici circolari superiore ed inferiore termicamente isolate. Siano 48°C la temperatura misurata sulla superficie laterale e 32°C la temperatura dell'aria ambiente. Avendo stimato il coefficiente di convezione tramite una delle relazioni reperibili nei manuali, valutare la potenza elettrica dissipata all'interno del dispositivo. Inoltre, sapendo che la parte più esterna del dispositivo è costituita da un guscio cilindrico in materiale plastico con spessore 3 mm e conduttività termica 0.2 W/(m·°C), valutare la temperatura sulla superficie interna del guscio.

– *Dati*

L= 38.1 mm = 0.0381 m (altezza del dispositivo)

D= 12.7 mm = 0.0127 m (diametro del dispositivo)

T_s = 48°C (temperatura superficiale

T_a = 32°C (temperatura dell'aria)

$s = 3$ mm $= 0.003$ m (spessore del guscio esterno)

$\lambda = 0.2$ W/(m·°C) (conduttività termica del guscio esterno)

– *Determinare*

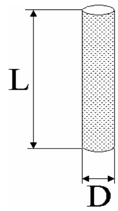
Potenza termica dissipata, $\dot{Q}$

Temperatura all'interno del guscio plastico, T_i

– *Ipotesi*

Proprietà termofisiche omogenee e indipendenti dalla temperatura, coefficiente di scambio termico convettivo uniforme, superfici superiore ed inferiore termicamente isolate, effetti radiativi trascurabili, condizioni stazionarie.

– *Soluzione*



Una relazione reperibile in letteratura per la stima del coefficiente di convezione, relativa alla situazione geometrica raffigurata a lato, è la seguente:

$$h_{conv} = 1.42 \cdot (\Delta T/L)^{0.25}$$

Tale relazione permette di effettuare la seguente stima del coefficiente di convezione:

$$h_{conv} = 1.42 \cdot \left(\frac{T_s - T_a}{L}\right)^{0.25} = 6.43 \ \ W/(m^2 \cdot °C)$$

Essendo termicamente isolate le superfici circolari superiore ed inferiore del dispositivo, la superficie di scambio termico è solo quella cilindrica laterale, la cui area vale:

$$A = \pi \cdot DL = 1.52 \cdot 10^{-3} \ \ m^2$$

La resistenza alla trasmissione del calore tra dispositivo ed ambiente vale quindi:

$$R_h = \frac{1}{h_{conv} A} = 102 \ \ °C/W$$

In condizioni stazionarie, la potenza termica dissipata all'interno del dispositivo deve attraversare integralmente la resistenza termica di cui sopra, da cui:

$$\dot{Q} = \frac{(T_s - T_a)}{R_h} = 0.156 \ \ W = 156 \ \ mW$$

La stessa potenza termica deve attraversare il guscio cilindrico in materiale plastico che costituisce la parte più esterna del dispositivo. Il diametro interno di tale guscio vale:

$$d = D - 2 \cdot s = 0.0067 \ \ m$$

La resistenza alla trasmissione del calore del guscio vale:

$$R_h = \frac{\ln(D/d)}{2\pi \cdot \lambda L} = 13.4 \ \ °C/W$$

In conclusione, la temperatura sulla superficie interna del guscio plastico vale:

$$T_i = T_s + R_h \dot{Q} = 50.1°C$$

– *Commenti*

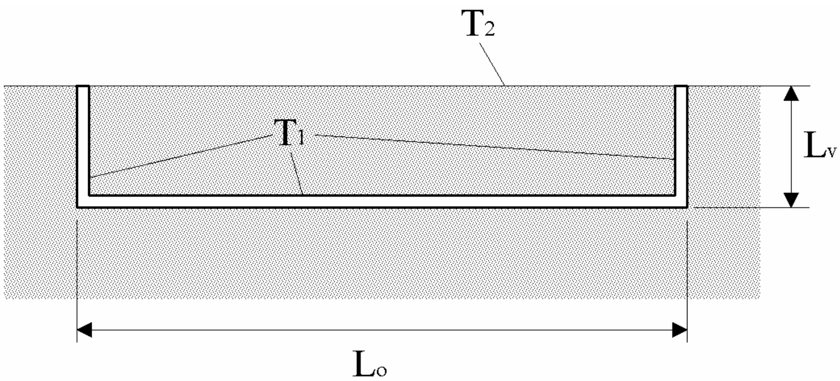
Relazioni empiriche come quella impiegata per stimare il coefficiente di convezione presentano un margine di incertezza sul valore stimato che raramente è inferiore al 20%. Di ciò va tenuto debitamente conto nei calcoli tecnici, ad esempio adottando opportuni coefficienti di sicurezza.

F.VI. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato

– *Problema*

Determinare la quantità di calore perduta istantaneamente da un tubo di rame con diametro esterno 50 mm, interrato e disposto come in figura, la cui temperatura superficiale è pari a 50°C. La temperatura superficiale e la conduttività termica del terreno sono rispettivamente pari a 10°C e 1.1 W/(m·°C).

Si trascurino le perdite in corrispondenza delle giunzioni ad angolo tra tratti rettilinei.



– *Dati*

$D = 50$ mm $= 0.050$ m	(diametro esterno del tubo in rame)
$T_1 = 50°C$	(temperatura superficiale esterna del tubo in rame)
$T_2 = 10°C$	(temperatura superficiale del terreno)
$\lambda = 1.1$ W/(m·°C)	(conduttività termica del terreno)
$L_v = 1$ m	(lunghezza dei tratti verticali)
$L_o = 5$ m	(lunghezza del tratto orizzontale)

– *Determinare*

$\dot{Q}$ (potenza termica perduta dal tubo)

– *Ipotesi*

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee, perdite negli angoli trascurabili.

– *Soluzione*

Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione.

Per i due tratti verticali, alla condizione (evidentemente verificata) che $L_v >> D$, il fattore di forma S_v vale:

$$S_v = \frac{2\pi L_v}{\ln(4L_v/D)} = \frac{2\pi \cdot 1}{\ln(4 \cdot 1/0.050)} = 1.434 \ \text{m}$$

Per il tratto orizzontale, interrato a profondità $z = L_v = 1$ m, è possibile calcolare un fattore di forma per conduzione a condizione che $L_o >> D$ e che $z > 1.5$ D, entrambe evidentemente verificate. Pertanto, il fattore di forma S_o vale:

$$S_o = \frac{2\pi L_o}{\ln(4z/D)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{\ln(4 \cdot 1/0.050)} = 7.169 \text{ m}$$

Il fattore di forma complessivo vale:

$$S = 2 \cdot S_v + S_o = 2 \cdot 1.434 + 7.169 = 10.0368 \text{ m}$$

In conclusione, la potenza termica persa dal tubo attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q} = S\lambda(T_1 - T_2) = 10.0368 \cdot 1.1 \cdot (50 - 10) = 442 \text{ W}$$

– *Commenti*

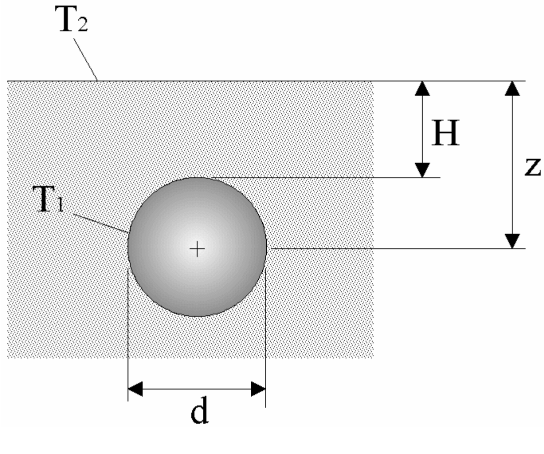
Se il tubo è quello di un impianto di riscaldamento, va opportunamente coibentato (a meno che la potenza termica dispersa non vada comunque a finire nell'ambiente riscaldato).

F.VII. Fattori di forma per conduzione: serbatoio sferico interrato

– *Problema*

Un serbatoio sferico con diametro esterno 250 cm e spessore di parete 4 mm viene interrato in modo tale che la sua parte più alta sia 120 cm sotto la superficie del terreno. La conduttività termica del terreno è pari a 0.7 W/(m·°C). Il serbatoio è riempito con acqua, che viene fatta ghiacciare durante la stagione invernale, per accumulare freddo sotto forma di calore latente di solidificazione.

Assumendo che il serbatoio venga completamente riempito di ghiaccio (densità 920 kg/m^3, calore latente di liquefazione 333.7 kJ/kg) e che la sua superficie esterna si mantenga sempre a 0°C e che la superficie del terreno sia mediamente a 20°C, determinare quale frazione in massa di ghiaccio si scioglie nell'arco di 60 giorni per effetto degli scambi termici con il terreno.



Determinare inoltre quale frazione di massa si perde se, senza variare la posizione del guscio rispetto alla superficie del terreno, lo si riveste con un involucro sferico spesso 120 mm, realizzato in materiale termicamente isolante con conduttività termica 0.06 W/(m·°C).

– *Dati*

$d = 250$ cm $= 2.50$ m	(diametro del serbatoio sferico)
$H = 120$ cm $= 1.20$ m	(profondità di sotterramento del serbatoio)
$s_p = 4$ mm $= 0.004$ m	(spessore di parete del serbatoio)
$\lambda_t = 0.7$ W/(m·°C)	(conduttività termica del terreno)
$T_1 = 0$°C	(temperatura superficiale esterna del serbatoio)

$\rho = 920$ kg/m^3 (densità dell'acqua ghiacciata)

$c = 333.7$ kJ/kg $= 333.7 \cdot 10^3$ J/kg (calore latente di solidificazione/liquefazione dell'acqua)

$T_2 = 20°C$ (temperatura superficiale media del terreno)

$t = 60$ gg $= 5.186 \cdot 10^6$ s (periodo temporale di riferimento)

$s_i = 120$ mm $= 0.120$ m (spessore di parete del serbatoio)

$\lambda_i = 0.06$ W/(m·°C) (conduttività termica dell'involucro sferico)

– *Determinare*

f_l (frazione di ghiaccio liquefatta)

– *Ipotesi*

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee.

– *Soluzione*

Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione, per il cui calcolo sono disponibili nella manualistica di riferimento svariate soluzioni analitiche. Per il caso in esame, si può impiegare la soluzione per una sfera isoterma interrata in un mezzo semi-infinito.

La profondità z del centro del serbatoio sferico vale:

$$z = H + d/2 = 2.45 \text{ m}$$

Alla condizione (evidentemente verificata) che z > d/2, il fattore di forma S è valutabile mediante la relazione:

$$S = \frac{2\pi \cdot d}{1 - 0.25\, d/z} = \frac{2\pi \cdot 2.50}{1 - 0.25 \cdot 2.50/2.45} = 21.087 \text{ m}$$

La potenza termica trasmessa attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q} = S\lambda_t (T_2 - T_1) = 21.087 \cdot 0.7 \cdot (25 - 0) = 295 \text{ W}$$

L'energia trasmessa nel periodo di riferimento vale:

$$Q = \dot{Q}t = 295 \cdot 5.184 \cdot 10^6 = 1.530 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A ciò corrisponde, alla fine del periodo di tempo considerato, una massa di ghiaccio liquefatta pari a:

$$m_l = \frac{Q}{c} = \frac{1.530 \cdot 10^9}{333700} = 4586 \text{ kg}$$

Il raggio interno del serbatoio è pari a:

$$r = d/2 - s = 2.50/2 - 0.004 = 1.246 \text{ m}$$

Il volume interno del serbatoio, occupato dall'acqua ghiacciata, è quindi pari a:

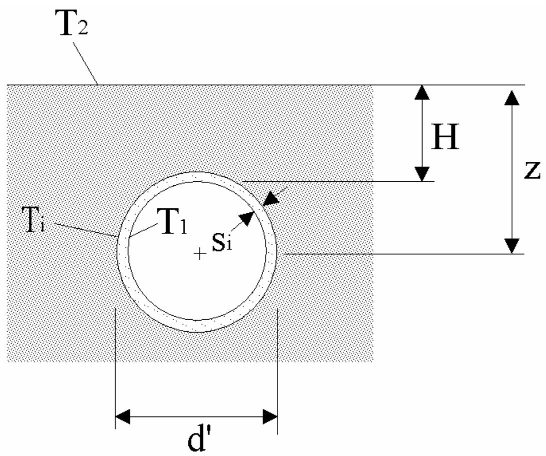
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1.246^3 = 6.503 \text{ m}^3$$

La massa di ghiaccio inizialmente contenuta nel serbatoio vale:

$$m = \rho V = 5983 \text{ kg}$$

In conclusione, il ghiaccio che si è liquefatto alla fine del periodo considerato rappresenta una frazione in massa pari a:

$$f_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{4583}{5983} = 0.767 = 76.7\%$$



Se si avvolge il serbatoio nel guscio sferico di materiale termicamente isolante citato nel testo (vedi schema nella figura precedente), la superficie esterna del guscio presenta diametro:

$$d' = d + 2 \cdot s_i = 2.50 + 2 \cdot 0.120 = 2.74 \ \text{m}$$

La profondità z del centro del serbatoio non cambia. Pertanto, il fattore di forma per conduzione riferito alla superficie esterna dell'isolamento vale:

$$S' = \frac{2\pi \cdot d'}{1 - 0.25\, d'/z} = \frac{2\pi \cdot 2.74}{1 - 0.25 \cdot 2.74/2.45} = 23.897 \ \text{m}$$

Il prodotto del fattore di forma per la conduttività termica del terreno rappresenta l'inverso della resistenza alla conduzione termica di forma tra la superficie esterna della sfera e la superficie del suolo:

$$R_{S'} = \frac{1}{S'\lambda_t} = \frac{1}{23.897 \cdot 0.7} = 0.060 \ \text{°C/W}$$

La resistenza alla conduzione termica associata al guscio sferico isolante vale:

$$R_i = \frac{d' - d}{2\pi \cdot d' d \lambda_i} = \frac{2.74 - 2.50}{2\pi \cdot 2.74 \cdot 2.50 \cdot 0.06} = 0.093 \ \text{°C/W}$$

Se si trascura il calore sensibile che può essere accumulato dalle capacità termiche della parete del serbatoio e del materiale isolante, verosimilmente ridotte, la potenza termica che attraversa il terreno compreso tra superficie esterna della sfera e superficie del suolo deve attraversare integralmente il guscio isolante suddetto. Se ne deduce che la resistenza alla conduzione termica associata al guscio isolante lavora in serie con la resistenza termica di forma. La resistenza complessiva vale quindi:

$$R' = R_{S'} + R_i = 0.060 + 0.093 = 0.153 \ \text{°C/W}$$

La potenza termica trasmessa attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q}' = \frac{(T_2 - T_1)}{R'} = \frac{(25 - 0)}{0.153} = 131 \ \text{W}$$

L'energia trasmessa nel periodo di riferimento vale:

$$Q' = \dot{Q}' t = 131 \cdot 5.184 \cdot 10^6 = 0.679 \cdot 10^9 \ \text{J}$$

A ciò corrisponde, alla fine del periodo di tempo considerato, una massa di ghiaccio liquefatta pari a:

$$m_l' = \frac{Q'}{c} = \frac{0.679 \cdot 10^9}{333700} = 2034 \text{ kg}$$

Nel caso del serbatoio coibentato, il ghiaccio che si è liquefatto alla fine del periodo considerato rappresenta una frazione in massa pari a:

$$f_l' = \frac{m_l'}{m} = \frac{2034}{5983} = 0.340 = 34\%$$

– *Commenti*

È evidente che il serbatoio va adeguatamente coibentato.

La temperatura sulla superficie esterna dell'involucro isolante vale:

$$T_i = T_l + R_i \dot{Q}' = 0 + 0.093 \cdot 131 = 12.2°C$$

F.VIII. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato (2)

– *Problema*

In un tubo in plastica con lunghezza 25 m, diametro interno 100 mm e diametro esterno 122 mm, interrato orizzontalmente a profondità 120 cm (riferita all'asse), scorre un fluido a temperatura T_f=65°C pressoché costante. Siano pari a 150 W/(m^2·°C) il coefficiente di convezione sulla superficie interna del tubo, a 1.2 W/(m·°C) la conduttività termica delle pareti del tubo e a 0.5 W/(m·°C) la conduttività termica del terreno. Selezionando, tra le varie relazioni disponibili nei manuali, una relazione per il calcolo del fattore di forma per conduzione, stimare la potenza termica persa dal fluido verso la superficie del terreno, mediamente a temperatura 25°C.

– *Dati*

L = 25 m	(lunghezza del tubo)
d = 100 mm = 0.100 m	(diametro interno del tubo)
D = 122 mm = 0.122 m	(diametro esterno del tubo)
Z = 120 cm = 1.20 m	(profondità del tubo, riferita all'asse)
T_f = 65°C	(temperatura del fluido)
T_s = 25°C	(temperatura in superficie)
h = 150 W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
λ_p = 1.2 W/(m·°C)	(conduttività termica di parete del tubo)
λ_t = 0.5 W/(m·°C)	(conduttività termica del terreno)

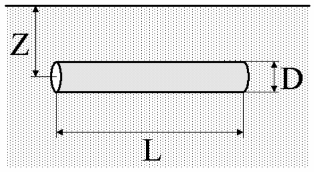
– *Determinare*

Potenza termica perduta dal tubo, $\dot{Q}$

– *Ipotesi*

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee, temperatura del liquido costante, coefficiente di convezione omogeneo.

– *Soluzione*



Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione. In letteratura è reperibile la seguente relazione, relativa alla situazione geometrica raffigurata a lato:

$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} \quad \text{valida per } L >> D,\ Z > 1.5 \cdot D$$

Il diametro di riferimento è quello esterno del tubo. La verifica delle condizioni di validità restituisce:

$$L/D = 25/0.122 = 205 >> 1 \qquad \Rightarrow \text{ OK!}$$

$$Z = 1.20/0.122 = 9.8 > 1.5 \qquad \Rightarrow \text{ OK!}$$

Il fattore di forma vale quindi:

$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} = \frac{2\pi \cdot 25}{\ln(4 \cdot 1.20/0.122)} = 42.8 \text{ m}$$

La resistenza termica di forma vale (vedi Es.F.VI-VII):

$$R_f = \frac{1}{S\lambda_t} = \frac{1}{42.8 \cdot 0.5} = 0.0468 \ °C/W$$

La potenza termica che attraversa il terreno compreso tra superficie esterna del tubo e superficie esposta all'aria deve attraversare anche le pareti del tubo e l'interfaccia convettiva tra queste e il liquido. Se ne deduce che la resistenza alla conduzione termica delle pareti e la resistenza convettiva lavorano in serie con la resistenza termica di forma (cfr. Es.F.VII). La resistenza conduttiva delle pareti vale:

$$R_p = \frac{\ln(D/d)}{2\pi \cdot \lambda_p L} = \frac{\ln(0.122/0.100)}{2\pi \cdot 1.20 \cdot 25} = 0.00105 \ °C/W$$

La resistenza convettiva all'interno del tubo vale:

$$R_c = \frac{1}{\pi \cdot dLh} = \frac{1}{\pi \cdot 0.100 \cdot 25 \cdot 150} = 0.00085 \ °C/W$$

La resistenza complessiva vale quindi:

$$R = R_f + R_p + R_c = 0.0487 \ °C/W$$

In conclusione, la potenza termica persa dal tubo attraverso il terreno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_f - T_s)}{R} = \frac{(65-25)}{0.0487} = 822 \text{ W}$$

F.IX. Fattori di forma per conduzione: tubo interrato (3)

– *Problema*

In un condotto per teleriscaldamento con lunghezza 325 m, diametro interno 80 mm e spessore di parete 5 mm, rivestito esternamente da uno strato cilindrico di materiale isolante con spessore 50 mm ed interrato a profondità 150 cm (riferita al punto più elevato della sezione trasversale del rivestimento isolante), scorre acqua calda a temperatura 90°C pressoché costante. Si assumano pari a 300 W/(m^2·°C) il coefficiente di convezione sulla superficie interna del tubo, e a 12 W/(m·°C), 0.05 W/(m·°C) e 0.4 W/(m·°C), rispettivamente, le conduttività termiche del materiale di parete (metallico), del materiale isolante e del terreno. Selezionando, tra le varie relazioni disponibili nei manuali, una relazione per il calcolo del fattore di forma per conduzione, stimare la potenza termica persa dal fluido verso la superficie del terreno, che è mediamente a temperatura 20°C.

– *Dati*

$L = 325$ m	(lunghezza del condotto)
$d = 80$ mm $= 0.080$ m	(diametro interno del condotto)
$s_p = 5$ mm $= 0.005$ m	(spessore di parete del condotto)
$s_r = 50$ mm $= 0.050$ m	(spessore del rivestimento isolante)
$z = 150$ cm $= 1.50$ m	(profondità di interramento)
$T_f = 90$°C	(temperatura del fluido)
$h_i = 300$ W/(m^2·°C)	(coefficiente di convezione interno)
$\lambda_p = 12$ W/(m·°C)	(conduttività termica di parete)
$\lambda_r = 0.05$ W/(m·°C)	(conduttività termica del rivestimento isolante
$\lambda_t = 0.4$ W/(m·°C)	(conduttività termica del terreno)
$T_s = 20$°C	(temperatura superficiale)

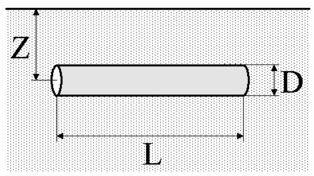
– *Determinare*

Potenza termica perduta dall'acqua calda, $\dot{Q}$

– *Ipotesi*

Condizioni stazionarie, superfici isoterme, proprietà del terreno omogenee, temperatura del liquido costante, coefficiente di convezione omogeneo

– *Soluzione*



Il problema è risolvibile utilizzando i fattori di forma per conduzione. In letteratura è reperibile la seguente relazione, relativa alla situazione geometrica raffigurata a lato:

$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} \quad \text{valida per} \quad L >> D,\ \ Z > 1.5 \cdot D$$

Il diametro di riferimento è quello esterno del rivestimento isolante, che vale:

$$D = d + 2 \cdot (s_p + s_r) = 0.080 + 2 \cdot (0.005 + 0.050) = 0.190 \ \text{m} = 190 \ \text{mm}$$

La verifica della prima condizione di validità restituisce:

$$L/D = 325/0.190 = 1711 >> 1 \qquad \Rightarrow \ \text{OK!}$$

La profondità Z dell'asse del condotto (diversa da z) è pari a

$$Z = z + D/2 = 1.50 + 0.95 = 1.595 \;\; \text{m}$$

La verifica della seconda condizione di validità restituisce:

$$Z = 1.595 / 0.190 = 8.4 > 1.5 \qquad \Rightarrow \;\text{OK!}$$

Il fattore di forma per conduzione vale quindi:

$$S = \frac{2\pi \cdot L}{\ln(4 \cdot Z/D)} = \frac{2\pi \cdot 325}{\ln(4 \cdot 1.595/0.190)} = 581 \;\; \text{m}$$

La resistenza termica di forma vale (vedi Es.F.VI-VII):

$$R_f = \frac{1}{S\lambda_t} = \frac{1}{581 \cdot 0.4} = 0.004302 \;\; °C/W$$

La potenza termica che attraversa il terreno compreso tra la superficie esterna del tubo (ovvero la superficie esterna dello strato cilindro di rivestimento) e la superficie esposta all'aria ambiente deve attraversare anche il rivestimento isolante, le pareti del tubo e l'interfaccia convettiva tra queste e il liquido. Se ne deduce che le resistenze alla conduzione termica del rivestimento e delle pareti e la resistenza convettiva lavorano in serie con la resistenza termica di forma (cfr. Es.F.VI).

La resistenza conduttiva del rivestimento isolante vale:

$$R_r = \frac{\ln[D/(D - 2 \cdot s_r)]}{2\pi \cdot \lambda_r L} = \frac{\ln[0.190/(0.190 - 2 \cdot 0.050)]}{2\pi \cdot 0.05 \cdot 325} = 0.007318 \;\; °C/W$$

La resistenza conduttiva delle pareti metalliche vale:

$$R_p = \frac{\ln[(d + 2 \cdot s_p)/d]}{2\pi \cdot \lambda_p L} = \frac{\ln[(0.080 + 2 \cdot 0.005)/0.080]}{2\pi \cdot 12 \cdot 325} = 0.000005 \;\; °C/W$$

La resistenza convettiva all'interno del tubo vale:

$$R_c = \frac{1}{\pi \cdot dLh} = \frac{1}{\pi \cdot 0.080 \cdot 325 \cdot 300} = 0.000041 \;\; °C/W$$

La resistenza complessiva vale quindi:

$$R = R_f + R_r + R_p + R_c = 0.01167 \;\; °C/W$$

In conclusione, la potenza termica persa dal tubo verso il terreno vale:

$$\dot{Q} = \frac{(T_f - T_s)}{R} = \frac{(90 - 20)}{0.01167} = 6000 \;\; W = 6.0 \;\; kW$$