



Dimensionamento motori elettrici

Le note che seguono sono una raccolta di formule e consigli per eseguire il corretto dimensionamento dei motori elettrici. Le formule sono corredate da alcune note esplicative e da alcuni richiami teorici fondamentali.

Per facilitare tutti coloro i quali volessero approfondire gli argomenti trattati è inserita anche una bibliografia essenziale.

Indice

1. Considerazioni generali,
2. Considerazioni sulla massima velocità e sulle coppie richieste in funzione delle diverse tipologie di macchine.
3. Appendici e formulari

Questo documento è messo liberamente a disposizione dall'autore per tutti gli utenti di plcforum.it. La riproduzione parziale, o totale, del documento è consentita alla sola condizione che siano esplicitamente citate le fonti.

Esclusione di responsabilità

L'autore e plcforum.it non si assumo responsabilità per danni e inconvenienti, a cose e/o a persone, derivanti dall'uso del contenuto di questo documento.



1. Considerazioni generali

Il dimensionamento di un motore elettrico si effettua in base a due parametri principali: velocità massima richiesta e coppia massima richiesta. Da questi due parametri ne discende la potenza massima del motore. Il tipo di motore viene determinato in base alle caratteristiche dell'impianto ed a considerazioni economiche.

La moderna tendenza è per l'impiego di motori asincroni pilotati da inverter. Per alcune applicazioni è ancora conveniente l'impiego di motori in corrente continua. L'impiego dei motori brushless è più orientato nel controllo di assi o, comunque, in tutti gli impieghi dove sono richieste accelerazioni violente e prontezza di risposta. In questo settore esistono nicchie dove l'uso di motori in corrente continua particolari, come i motori a magneti permanenti, a terre rare, a rotore piatto, sono ancora convenienti

1.1 Motori in alternata

La drastica riduzione dei costi degli inverter, la loro accresciuta affidabilità, le notevoli prestazioni dinamiche raggiunte, unitamente alla ridotta necessità di manutenzione di un motore in alternata, fanno considerare i moderni azionamenti in alternata come gli azionamenti ideali.

In funzione dell'applicazione si possono impiegare inverter V/F o inverter vettoriali. Gli inverter tradizionali, o inverter V/F, hanno impiego in applicazioni dove non è richiesta la coppia massima a basso regime di rotazione, controllo di coppia, alte prestazioni dinamiche.

Nel caso di applicazioni nel campo del sollevamento si adottano inverter vettoriali con reazione di posizione. La reazione di posizione può essere effettuata con resolver o con encoder.

Negli altri casi è possibile, a meno di dover controllare la coppia su tutti e 4 i quadranti, l'impiego di inverter vettoriali sensorless, cioè senza reazione di posizione.

In tutte le applicazioni con inverter dove si preveda un utilizzo del motore, non saltuario e transitorio, anche a bassi regimi di rotazione, è indispensabile l'uso della ventilazione assistita, pena gravi danni al motore.

E' necessario che i motori siano di buona qualità e, sopra a tutto, abbiano un isolamento ben dimensionato, perché la tensione in uscita da un inverter non è sinusoidale, ma impulsiva; solo l'azione filtrante dell'induttanza del motore la rende pseudo sinusoidale.

1.2 Motori in corrente continua

Fino a pochi anni fa erano praticamente l'unica soluzione possibile per i controlli di velocità variabile. Oggi sono praticamente soppiantati dagli azionamenti in alternata. Possono essere convenienti in applicazioni molto povere, dove si impiegano convertitori semicontrollati monofasi, il cui costo è molto competitivo.

Hanno ancora una loro convenienza nelle applicazioni dove si impiegano grosse taglie > 100 kW.

Sono convenienti anche in applicazioni speciali; applicazioni dove si richiedono prestazioni dinamiche di assoluta eccellenza. Si applicano motori speciali, a rotore piatto e magneti permanenti a terre rare, con convertitori di tipo chopper, che garantiscono una elevata banda passante.

1.3 Motori brushless

Nelle applicazioni che richiedono elevate prestazioni dinamiche, l'uso di servo motori in alternata si fa sempre più competitivo, per prestazioni e convenienza economica. In questa sezione possono essere inclusi anche i motori brushless generici. Fra i motori brushless la tendenza privilegia i motori sinusoidali, i tipi trapezoidali sono sconsigliabili per nuove applicazioni



2. Criteria di scelta

2.1 Determinazione della massima velocità angolare richiesta la motore

Per dimensionare un motore elettrico è necessario, per prima cosa, determinarne la tipologia più conveniente: alternata, continua, brushless/servo. Stabilito il tipo di azionamento, si procederà con l'individuazione della massima velocità angolare richiesta dall'applicazione.

Le applicazioni, dal punto di vista della velocità del motore, si possono suddividere in tre grandi classi:

- applicazioni per moto traslatorio
- applicazioni per moto rotatorio
- applicazioni per avvolgitura (aspi)

2.1.1 Applicazioni per moto traslatorio

Nelle applicazioni per moto traslatorio esiste sempre un congegno meccanico che converte il moto rotatorio in moto lineare. I tipi più usati sono: vite a circolazione di sfere, vite senza fine, pignone – cremagliera, cinghia – puleggia dentata, cinghia – puleggia trapezoidale. La scelta della trasmissione dipenderà dal tipo di applicazione, le diverse tipologie sono state elencate in ordine di precisione decrescente. Tutti i tipi elencati, comunque, hanno in comune la costante di conversione radianti – mm o, se si preferiscono le unità pratiche, giri – mm. Tra motore e dispositivo di conversione può essere interposto anche un ulteriore elemento di riduzione di velocità. Tutti i dispositivi, interposti tra asse motore e oggetto movimentato, prendono il nome di **catena cinematica**. Il rapporto tra il valore della velocità angolare del motore, con il valore di velocità angolare all'uscita della catena cinematica, prende il nome di rapporto di riduzione totale, verrà indicato con **N**.

$$N = \frac{\omega_{motore}}{\omega_{carico}} \quad [2.1.1]$$

Per esemplificare il concetto supponiamo che si debba azionare un utensile alla velocità massima 0.02 ms, cioè 20 mms. L'utensile è azionato da una vite, vite il cui passo è pari 1 mm. In altri termini ad ogni rivoluzione completa della vite (1 rad) corrisponderà una traslazione lineare pari ad 1mm. Quindi alla massima velocità lineare corrisponderà una velocità angolare pari 125,66 rad/s o, se preferite unità pratiche, 1200 giri/minuto.

Per scegliere il motore è fondamentale stabilire se è conveniente interporre, tra motore e vite, un riduttore di velocità.

Nel caso si adottasse un azionamento in alternata, sarebbe possibile adottare un motore a tre paia di poli, la cui velocità base è pari a circa 940 giri/minuto. Con questa scelta si raggiungerebbe la velocità massima a circa 64 Hz. Si lavorerebbe in regime di potenza costante per circa il 28% dell'escursione di velocità.

Il vantaggio di un pilotaggio diretto è dato esclusivamente dalla precisione di posizionamento; ogni anello della catena cinematica introduce giochi, quindi imprecisioni. Inoltre ogni anello della catena ha, ovviamente, guadagno < 1; in altri termini bisogna spendere energia per movimentarlo.

Con l' inserimento di un elemento riduttore di velocità, si otterrà un diminuzione del momento d'inerzia del carico riportato all'asse motore; riduzione corrispondente al **quadrato del rapporto di riduzione**.



2.1.2 Applicazioni per moto rotatorio

Nelle applicazioni per moto rotatorio si procede più semplicemente. Non è necessario convertire il movimento lineare in movimento angolare. Generalmente si conosce la massima velocità angolare ω , più frequentemente, la massima velocità di rotazione del carico. È necessario, quindi, moltiplicare questa velocità per il fattore di riduzione della catena cinematica, N , per ottenere la massima velocità angolare richiesta al motore. Valgono le medesime considerazioni del paragrafo precedente.

2.1.3 Applicazioni per avvolgitura

Le applicazioni per avvolgitura sono, in pratica, applicazioni per moto rotatorio dove il carico cambia dimensioni senza soluzione di continuità. Questa particolarità determina un momento d'inerzia continuamente variabile e, conseguentemente, una coppia aggiuntiva variabile con continuità.

Per determinare la massima velocità richiesta al motore, si deve procedere nel seguente modo. Si determina la massima velocità lineare del materiale avvolto, si determina il minimo diametro dell'avvolgimento. La massima velocità di rotazione corrisponderà alla massima velocità lineare al minimo diametro. La massima velocità del motore si otterrà moltiplicando la massima velocità angolare dell'avvolgimento, per il coefficiente di riduzione di tutta la catena cinematica. In applicazioni di questo tipo è conveniente massimizzare coefficiente di riduzione della catena cinematica, in modo da ottenere il minimo momento d'inerzia riportato all'asse motore.

Un esempio chiarirà meglio. Si consideri ad un aspo con diametro minimo pari a 0.16m e diametro massimo pari 2m. Un rapporto diametri di 12.5 è grande, ma non eccezionale. La massima velocità del materiale corrisponderà a 10ms. La massima velocità angolare dell'aspo sarà pari a 125 rads, corrispondenti 1193.66 rpm. Per scegliere un motore per avvolgitura si deve considerare che, nella maggior parte dei casi, al minimo diametro corrisponde un livello di coppia prossimo al valore minimo. Pertanto si può benissimo usare il motore a velocità maggiore della nominale, accettandone la diminuzione del valore di coppia. La coppia deve diminuire perché, per velocità maggiori della velocità nominale, si lavora in regime di potenza costante, quindi al crescere della velocità angolare diminuirà la coppia motrice. Queste considerazioni sono valide sia per azionamenti in corrente continua, sia per quelli in corrente alternata. Nel caso d'esempio ipotizziamo di scegliere un motore due poli e di lavorare fino a 100 Hz. A questa frequenza corrisponderà una velocità angolare pari a 594 rads, corrispondenti a 5680 rpm. Con questa soluzione possiamo tenere un rapporto di riduzione totale pari a 4.7, il momento d'inerzia sarà ridotto di 4.7^2 (22.09 volte. Se ci fossimo limitati alla velocità nominale, il rapporto di riduzione sarebbe pari a 2.5, con riduzione del momento d'inerzia di solo 6.25 volte. Vale anche un'altra considerazione: il rapporto tra velocità angolare e diametro è iperbolico. In altri termini ad incrementi lineari di diametro corrispondono decrementi iperbolici di velocità angolare. Nel caso preso ad esempio, la velocità angolare nominale di 297 rads, corrispondenti a 2840 rpm, sarà raggiunta con valore di diametro pari a 0.316 m. La velocità nominale sarà raggiunta con valori di diametro ancora piccoli, che richiedono valori minimi di coppia.



2.2 Determinazione della coppia motrice massima

Il secondo parametro necessario per dimensionare il motore è la massima coppia motrice che il motore dovrà erogare.

2.2.1 Considerazioni generali

Bisogna sempre distinguere le richieste di coppia istantanea dalle richieste continuative. Inoltre è necessario verificare il regime di velocità angolare a cui è richiesta l'incremento di coppia.

Le richieste d'incrementi coppia, prevedibili, sono dovuti esclusivamente ad accelerazioni ed a vincere l'attrito di primo distacco. L'attrito di primo distacco è quella parte di attrito che scompare non appena il carico inizia a muoversi. Le ragioni di questo attrito ulteriore sono molteplici e vanno analizzate applicazione per applicazione. E' evidente che alla coppia necessaria per vincere questo tipo di attrito si sommerà sempre la coppia necessaria per accelerare.

Le richieste di coppia aggiuntiva, per le compensazioni del momento d'inerzia e dell'attrito di primo distacco, sono richieste impulsive. Questo fatto trae spesso in inganno, inducendo a dimensionare il motore solo in funzione della coppia continuativa.

Si consideri, ad esempio, un'applicazione in cui, per compensare attrito di primo distacco e momento d'inerzia, sia richiesto un incremento di coppia minimo. Questo incremento sarà pari al 20% del valore nominale, del motore scelto in prima approssimazione. Se ci si fermasse a questa considerazione la nostra scelta potrebbe considerarsi ottimale. Se invece analizziamo il ciclo di lavoro si nota che è un susseguirsi di accelerazioni e decelerazioni. Un successivo calcolo della **coppia termica** ci farà scoprire che il suo valore è pari al 110% del valore di coppia nominale. In altri termini è come se il nostro motore dovesse erogare, **in regime continuativo**, una coppia motrice pari a 1,1 volte il valore della coppia motrice nominale. E' evidente che la scelta, effettuata in prima approssimazione, va corretta la rialzo.

Particolare attenzione va posta nella scelta di servo motori in corrente continua. Questi motori possono sopportare correnti di picco il cui valore può arrivare a $8 \cdot I_n$. Questo valore però non è applicabile sull'intera gamma di velocità. Generalmente si applica fino a circa 1/3 della velocità massima poi decresce, con legge parabolica, fino a raggiungere il valore di corrente nominale alla velocità massima. Al di sopra di questi valori, esiste una zona di lavoro del motore utilizzabile **solo in condizioni di emergenza**. Utilizzando il motore in quest'area si ha un'usura anomala delle spazzole e del collettore. Superando anche questo secondo limite il motore verrà danneggiato in modo irreversibile. Si raccomanda pertanto, quando si applichino motori di questo tipo, di studiare attentamente i grafici del costruttore.

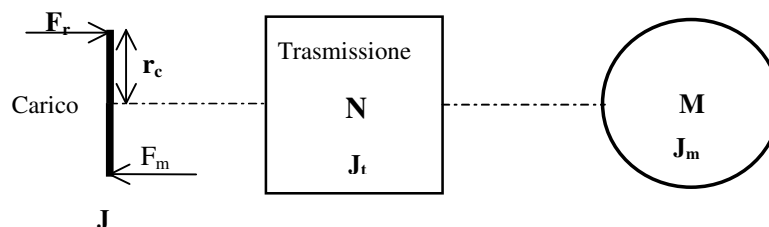


Figura 2.2.1 Schematizzazione della catena cinematica

La figura 2.2.1 Schematizza la catena cinematica, le forze applicate ed i momenti d'inerzia. Come per la determinazione della velocità massima, suddividiamo la cinematica in tre casi tipici: movimentazione lineare, movimentazione rotatoria e avvolgitura.



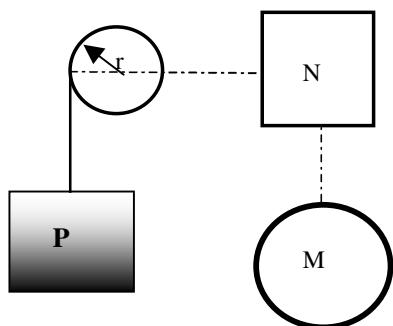
2.2.2 Movimenti traslatori

A questo tipo di applicazioni appartengono tutte le lavorazioni dove il carico viene spostato secondo una linea retta, sia essa orizzontale, verticale od obliqua.

La forza, indicata nello schema di figura 2.2.1 come “F_r”, rappresenta l’insieme di tutte le forze che si oppongono al movimento in regime stazionario, quindi sono esclusi i momenti d’inerzia. Per esplicitare meglio il concetto facciamo qualche esempio.

2.2.2.1 Sollevamento tramite fune e tamburo.

Tutto quanto seguirà non perde di validità anche se il sollevamento si effettua, p.e., tramite puleggia dentata e cinghia.



La figura a lato schematizza un sistema di sollevamento. Il sistema è costituito da un tamburo (puleggia) di raggio “r”, da una fune (cinghia), da un riduttore con rapporto “N”, da un motore “M”.

Il carico, avente una massa P, applica una forza F sul tamburo. Ricordiamo che, sulla terra, il peso e la massa sono equivalenti. La forza esercitata dalla massa P sarà pari a:

$$F = m * a = P * a \quad [2.2.2.1.1]$$

dove m è la massa espressa in kg, a è l’accelerazione di gravità, il cui valore medio è 9.81 ms⁻². La forza risultante sarà espressa in Newton (N).

Questa forza applicata al tamburo genera, all’asse del medesimo, un coppia C_r. Questa coppia vale:

$$C_r = F * r \quad [2.2.2.1.2]$$

Dove:

C_r = coppia espressa in Nm

F = forza espressa in N

r = raggio del tamburo (puleggia) espresso in m

Per sollevare il carico il motore dovrà fornire, attraverso la catena cinematica, una coppia C_m equivalente a:

$$C_m = -(C_r + \varepsilon) \quad [2.2.2.1.3]$$

In pratica, considerando di lavorare in regime di velocità stazionaria, i due valori di coppia si equivalgono.

Questo in un sistema ideale senza perdite. Consideriamo, per esempio, il rendimento del gruppo tamburo (puleggia) – fune (cinghia) pari a circa il 95%.

All’uscita del riduttore la coppia sarà C_m = C_r / 0.95.

Le medesime considerazione vale per il gruppo riduttore e per ogni altro elemento della catena cinematica. Nell’esempio schematizzato dalla figura, il motore dovrà fornire un a coppia determinata dalla relazione:

$$C_m = \left(\frac{C_r}{\eta_1} * N \right) * \frac{1}{\eta_2} \quad [2.2.2.1.4]$$

Dove:

N = rapporto di riduzione della catena cinematica

η₁ = rendimento del gruppo tamburo - fune (puleggia-cinghia)

η₂ = rendimento del riduttore



Con la relazione [2.2.2.1.4] si determina la coppia motrice necessaria per muovere il carico in regime di velocità stazionaria. A questo valore si dovrà aggiungere, durante le fasi di accelerazione, una ulteriore valore di coppia. Questo valore comprende due componenti: la coppia necessaria per compensare l'attrito di primo distacco, la coppia necessaria per compensare i momenti di inerzia. Tutti gli altri attriti sono compresi nei rendimenti delle varie sezioni.

Calcoliamo ora il momento d'inerzia totale J_t riportato all'asse motore. J_t è determinato con la relazione:

$$J_t = \frac{J_c + J_p}{N^2} + J_R + J_M \quad [2.2.2.1.4]$$

Dove:

J_c = momento d'inerzia del carico espresso in kgm^2
 J_p = momento d'inerzia della puleggia (tamburo) espresso in kgm^2
 J_R = momento d'inerzia del riduttore espresso in kgm^2
 J_M = momento d'inerzia del motore espresso in kgm^2
 N = Rapporto di riduzione

La coppia supplementare, per compensare il momento d'inerzia, si determina con la relazione:

$$C_a = J_t * \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad [2.2.2.1.5]$$

Dove:

$\ddot{\omega}$ = variazione della velocità angolare espressa in rads
 \ddot{t} = tempo di accelerazione espresso in second
 J_t = momento d'inerzia totale riportato all'asse motore, espresso in kgm^2 .
 C_a = coppia espressa in Nm .

A questo valore di coppia bisogna sommare, per le accelerazioni positive, il valore di coppia necessario a compensare gli attriti. Questo valore andrà invece sottratto nel caso di accelerazione negativa. La coppia totale, richiesta al motore, sarà:

$$C_t = C_m + C_a + C_{aa} \quad [2.2.2.1.6]$$



2.2.3 Movimenti rotatori

La metodologia è simile a quella adottata per i movimenti traslatori.

In genere a questo tipo di applicazioni appartengono macchine particolari quali: pompe, ventilatori, centrifughe e volani

Nel caso di pompe e ventilatori la coppia necessaria a vincere la resistenza alla rotazione aumenta con l'aumentare della velocità di rotazione; la legge dipende dalle caratteristiche meccaniche dell'apparato.

Il momento d'inerzia, nel caso di un ventilatore, dipende dalla forma costruttiva delle pale e non è di semplice determinazione. In genere è un dato fornito dal costruttore meccanico.

Calcolare il momento d'inerzia di pompe è ancora più difficoltoso. Fortunatamente le applicazioni di pompe non richiedono mai accelerazioni violente, pertanto difficilmente sarà necessario, per dimensionare il motore, tenere conto di questo parametro.

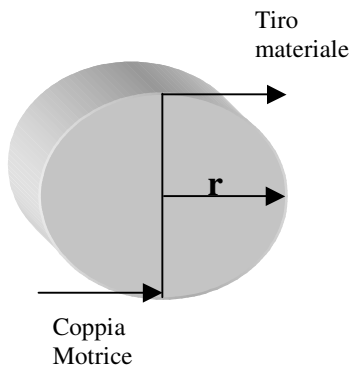
Diverso è il caso dei volani e delle centrifughe dove, sopra a tutto per le frenature, la coppia per compensare il momento d'inerzia incide pesantemente sul dimensionamento del motore. Quando è possibile, si ricorre all'aiuto di freni meccanici a disco per fermare rapidamente la macchina.

2.2.4 Macchine per avvolgitura

Pur essendo un caso particolare dei movimenti rotatori, si possono considerare un caso a se stante perché la loro velocità angolare è variabile con continuità, come è anche variabile il loro momento d'inerzia.

Come schematizzato nella figura, le due forze, uguali e contrapposte, sono: il tiro (o tensione) del ameriale e la coppia motrice.

Il braccio su cui agisce la forza tiro è il raggio dell'avvolgimento. Raggio che varierà durante tutta la lavorazione.



La coppia motrice, necessaria al corretto tensionamento del materiale, sarà:

$$C_m = r * T \quad [2.2.4.1]$$

Dove:

C_m = coppia motrice espressa in kgm

r = raggio massimo dell'avvolgimento espresso in m

T = tiro del materiale espresso in kg

Se, tra motore ed aspo, è interposto un riduttore di velocità la coppia motrice risultante all'asse motore sarà:

$$C_m = \frac{r * T}{N * \eta} \quad [2.2.4.2]$$

Dove:

N = rapporto di riduzione

η = rendimento della trasmissione

Il momento d'inerzia di un aspo è continuamente variabile in funzione del diametro, come è continuamente variabile la velocità angolare dell'aspo.

Il momento d'inerzia totale di un aspo, ridotto all'albero motore, sarà:

$$J_t = A * B * r^4 \quad [2.2.4.3]$$



Dove:

J_t = Momento d'inerzia totale ridotto all'albero motore, espresso in kgm^2 .
 r = raggio dell'aspo espresso in m

$$A = j_{mot} + \frac{J_{trasm.}}{N_{tr}^2} - \frac{\pi * l * \delta}{2 * N_{tr}^2} * r_0^4 \quad [2.2.4.5]$$

$$B = \frac{\pi * l * \delta}{2 * N_{tr}^2} \quad [2.2.4.5]$$

Dove:

r_0 = raggio interno dell'aspo espresso in m
 l = larghezza dell'avvolgimento espressa in m
 N_{tr} = rapporto di trasmissione
 δ = Peso specifico del materiale avvolto espresso in kgm^3

La relazione che determina il momento d'inerzia può essere riscritta come:

$$J_t = J_{mot} + \frac{J_{trasm.}}{N_{tr}^2} + \frac{\pi * l * \delta}{2 * N_{tr}^2} (r^4 - r_0^4) \quad [2.2.4.6]$$

La coppia aggiuntiva che il motore dovrà erogare per compensare il momento d'inerzia, sarà:

$$C_m = J_t * \frac{\delta\omega}{\delta t} \quad [2.2.4.7]$$

Se si considera la velocità periferica dell'avvolgimento, ovverossia la velocità lineare del materiale, avremo:

$$\omega = N_{tr} * \frac{V_l}{r} \quad [2.2.4.8]$$

Dove:

$\dot{\omega}$ = velocità angolare del motore **espressa in rads**
 V_l = velocità lineare del materiale espressa in ms

Trascurando costante il diametro durante il tempo di accelerazione, potremo scrivere:

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} = \frac{N_{tr}}{r} * \frac{\delta v}{\delta t} \quad [2.2.4.9]$$

da cui si ricaverà la coppia supplementare con la relazione:

$$C_m = N_{tr} \left(\frac{A}{r} + B * r^3 \right) * \frac{\delta v}{\delta t} \quad [2.2.4.10]$$

Il termine **A** rappresenta la parte costante del momento d'inerzia, mentre il termine **B** ne rappresenta la parte variabile .



Studiando la coppia in funzione del raggio di avvolgimento avremo il minimo valore determinato dalla relazione:

$$r_{C_{\min}} = \sqrt[4]{\frac{A}{3 * B}} \quad [2.2.4.11]$$

Si potranno avere tre casi significativi, in funzione del valore che può assumere $r_{C_{\min}}$ in relazione all'intervallo $r_0 - R_{\max}$:

$$\begin{aligned} r_{C_{\min}} &< r_0 \\ r_{C_{\min}} &< r_0 < R_{\max} \\ r_{C_{\min}} &> R_{\max} \end{aligned}$$

Nel caso di azionamenti per avvolgitura si deve considerare, in funzione del materiale avvolto, anche una coppia extra: la coppia necessaria alla piegatura del materiale.

Questo valore dipende dalla rigidità del materiale e decresce con il crescere del valore del raggio di curvatura.

In alcuni tipi di avvolgimento è anche necessario tenere conto del cosiddetto "effetto ventilatore". In altri termini se il fianco dell'avvolgimento assume particolari conformazioni provoca un effetto simile a quello delle pale di un ventilatore. Ne consegue che il motore dovrà erogare un'ulteriore coppia.

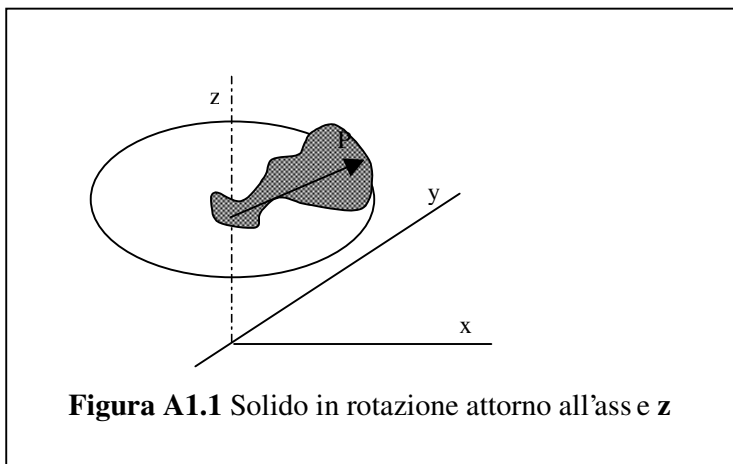


3 Appendici e Formulari

Appendice “A”. Momento d’inerzia

A1. Definizione del momento d’inerzia

Consideriamo un corpo rigido che ruota con una velocità angolare $\dot{\mathbf{u}}$, attorno ad un asse fisso, in un particolare sistema di riferimento, come in figura A1.1



Ciascuna particella di un corpo in rotazione possiede una certa energia cinetica. Una particella di massa m a una distanza r dall’asse di rotazione ha una velocità $v = \dot{\mathbf{u}} * r$. La sua energia cinetica è:

$$E_c = \frac{1}{2} * v^2 = \frac{1}{2} m * \omega^2 * r^2$$

l’energia cinetica totale del corpo è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle. Se, come supposto, il corpo è rigido $\dot{\mathbf{u}}$ è la stessa per tutte le particelle, quindi l’energia

cinetica totale K del corpo in rotazione vale:

$$K = \frac{1}{2} (m_1 * r_1^2 + m_2 * r_2^2 + \dots) * \omega^2 \quad [A1.1]$$

$$K = \frac{1}{2} * (\sum m * r^2) * \omega^2 \quad [A1.2]$$

Il termine $\sum m * r^2$, si chiama **momento d’inerzia** del corpo rispetto al suo asse di rotazione.

Si noti che il momento d’inerzia dipende da: forma del corpo, distribuzione delle masse nel corpo stesso e dall’asse di rotazione.

Il momento d’inerzia ha dimensione $[M * L^2]$ ed è, di norma, espresso in kgm^2 .

L’energia cinetica di un corpo può essere scritta in termini d’inerzia:

$$K = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad [A1.3]$$

Questa espressione è analoga alla:

$$k = \frac{1}{2} J v^2 \quad [A1.4]$$

L’ espressione esprime l’energia cinetica di un moto traslatorio.



A2. Esempi di calcolo

A2.1 Cilindro cavo

Consideriamo un cilindro cavo ruotante sul proprio asse.

La massa elementare più conveniente per il calcolo è costituito da una guaina cilindrica, di spessore infinitesimo dr , di raggio r , altezza L e densità δ . Potremo scrivere:

$$dm = \delta * dV \quad [A2.1.1]$$

"dV" è il volume della guaina cilindrica di massa dm .

$$dv = (2 * \pi * r * dr) * L \quad [A2.1.2]$$

da cui si ricava:

$$dm = \pi * L * \delta * r * dr \quad [A2.1.3]$$

quindi:

$$J = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \delta * r^3 * dr \quad [A2.1.4]$$

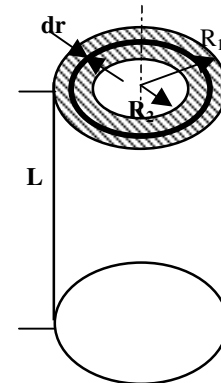


Fig.A2.1 Cilindro cavo

R_2 e R_1 sono, rispettivamente, i raggi interno ed esterno del cilindro cavo.

Consideriamo che la densità del materiale sia costante, risolvendo l'integrale, potremo scrivere:

$$J = \frac{1}{2} \pi \delta L (R_1^4 - R_2^4) \quad [A2.1.5]$$

La massa del corpo è δV , quindi potremo scrivere:

$$M = \delta * \pi * L (R_1^4 - R_2^4) \quad [A2.1.6]$$

Pertanto il momento d'inerzia di un **cilindro pieno**, rispetto al suo asse di rotazione è:

$$J = \frac{1}{2} * MR^2 \quad [A2.1.7]$$

R è il raggio del cilindro.

Nel sistema pratico si usa, come indicatore del momento d'inerzia di un cilindro o di un disco, il termine PD^2 , che vale:

$$PD^2 = \frac{1}{2} P * D^2 \quad [A2.1.8]$$

P è la massa del cilindro e D il diametro del cilindro. Per abitudine, sulla terra, si considerano equivalenti peso e massa, pertanto il rapporto tra PD^2 e J è

$$PD^2 = 4 * J \quad [A2.1.9]$$



A2.2 Sollevamento tramite puleggi o tamburo.

Sia P la massa da sollevare e r il raggio della puleggia o del tamburo di sollevamento. Il momento d'inerzia equivalente sarà:

$$J_{eq} = (P * r^2) \quad [A2.2.1]$$

Dove:

P = Massa da sollevare in kg

r = raggio del tamburo o della puleggia in m

Il momento d'inerzia totale sarà:

$$J_{tot} = J_{eq} + J_p \quad [A.2.2.2]$$

J_p è il momento d'inerzia del tamburo o della puleggia calcolato come descritto in A.2.1



Appendice B: formulario generale

B1 Fattori di conversione tra varie unità di misura

$$1 \text{ Cv} = 0,736 \text{ kW}$$

$$1 \text{ Hp} = 0,735 \text{ kW}$$

$$1 \text{ kW} = 1,36 \text{ Cv}$$

$$1 \text{ }^\circ\text{C} = 5/9(1^\circ\text{F}-32)$$

resistività del rame @ 20°C = 1ohm per 58m di sezione 1mm²

B2 Formule pratiche

Coppia espressa in kgm

$$C_m = \frac{716 * P}{rpm} \text{ con P espressa in Cv}$$

$$C_m = \frac{975 * P}{rpm} \text{ con P espressa in kW}$$

Potenza, in Cv, in un moto lineare

$$P = \frac{F * v}{75} \text{ dove F è la forza espressa in kg e v è la velocità in ms}$$

Coppia per accelerare un volano

$$C = \frac{PD^2 * rpm}{376 * t_{acc}} \text{ PD}^2 \text{ espresso in kgm}^2, t_{acc} \text{ in s.}$$

Energia immagazzinata in una massa volanica

$$E_c = \frac{PD^2 * (rpm)^2}{730} \text{ rpm =rivoluzioni per minuto; energia espressa in Joule}$$

Trasformazione di una massa che si muove ad una certa velocità in un PD² che ruota ad un certa velocità angolare espressa in rivoluzioni per minuto.

$$PD^2 = \frac{\text{Massa(in kg)} * v^2}{\pi^2 * (rpm)^2} \text{ dove v = ms}$$

Bibliografia essenziale

David Halliday – Robert Resnick: FISICA 1

Olivieri e Ravelli: Elettrotecnica 1 e 2

E. H. Werninck: Manuale Motori Elettrici